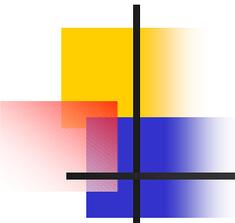


SAS 第9回

グラフ理論

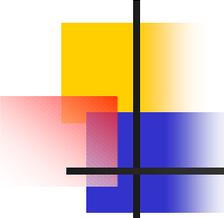
2007,8,11

担当: IPUSIRON



目次

- 双対グラフ
- グラフの彩色

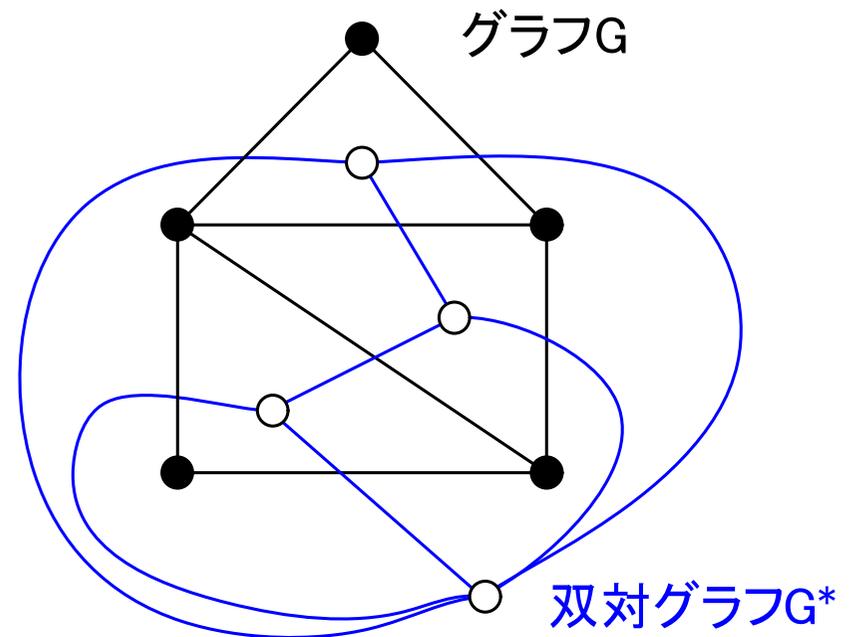


双対グラフとは

- 双対グラフ＝幾何学的双対グラフ
 - 与えられた平面グラフに対応して、作られるグラフのこと。
 - 作り方のルールは次のスライドで解説する。
- 双対グラフで考えると何が嬉しいか？
 - カットセット問題、彩色問題に応用できる。

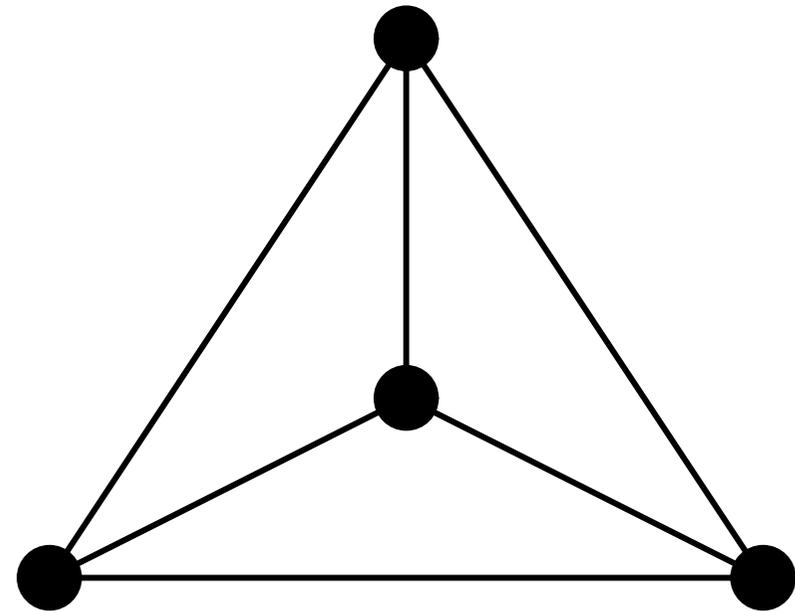
双対グラフの作り方の例

- 点の取り方
 - それぞれの面の内側に1つだけ白点を打つ。
 - これが G^* の点になる。
- 辺のとり方
 - G の各辺と1回だけ交わるようにして、白点同士を結ぶ。
 - これが G^* の辺になる。
- このように作られた G^* が G の双対グラフである。



完全グラフの双対グラフ(#1/2)

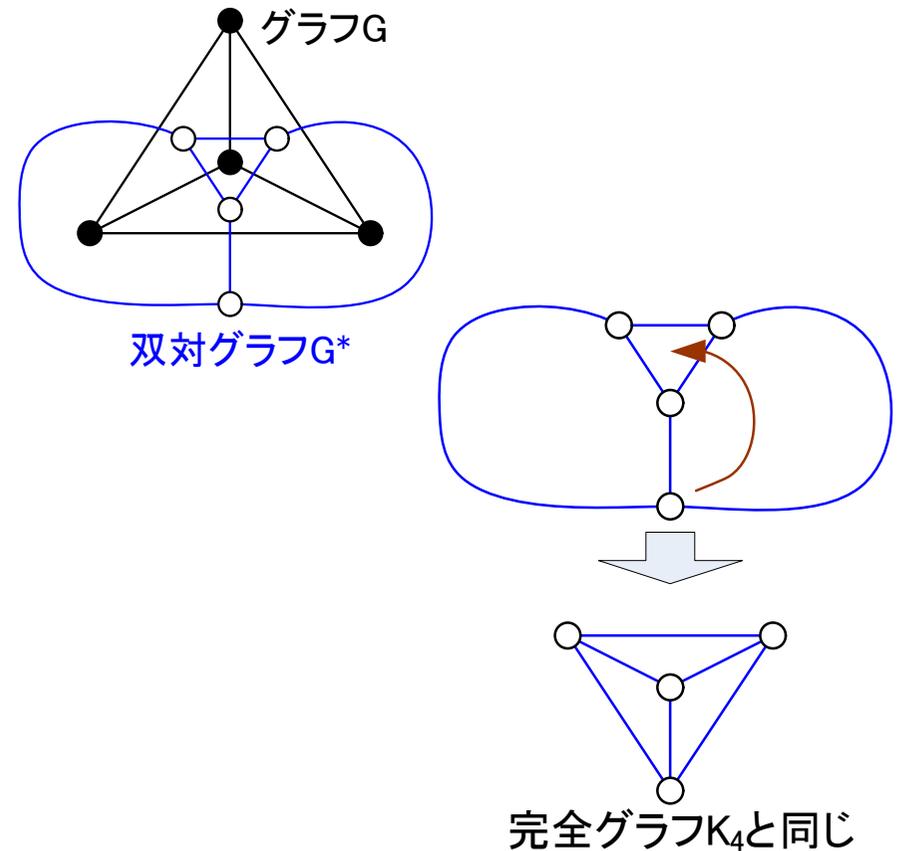
- 例題8.7
 - 完全グラフ K_4 の双対グラフは、やはり完全グラフ K_4 であることを示せ。
- (復習) 完全グラフ
 - どの異なる2頂点も隣接している単純グラフ
- (復習) 単純グラフ
 - ループや多重辺を含まないグラフ



完全グラフ K_4

完全グラフの双対グラフ(#2/2)

- 「 $G=K_4$ 」 \Rightarrow 「 $G^*=K_4$ 」を示したい。
- 実際に K_4 の双対グラフを書いて、それが K_4 と同じグラフかどうかを調べればよい。
- 右図から、題意は成り立つ。□



グラフとその双対グラフの点・辺・面の関係 (#1/3)

■ 補題15.1

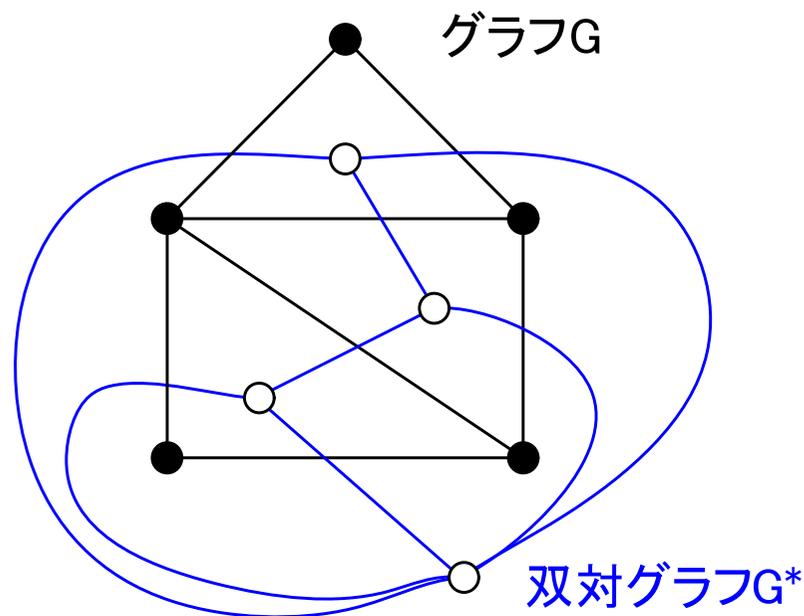
- 平面連結グラフ G (点が n 個、辺が m 本、面が f 個)があるとする。このとき、その双対グラフ G^* (点が n^* 個、辺が m^* 本、面が f^* 個)は、次の関係を満たす。

$$n^* = f, m^* = m, f^* = n$$

- 証明に入る前に例を見てみる。

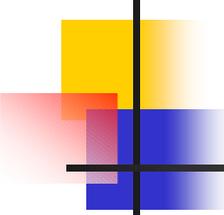
グラフとその双対グラフの点・辺・面の関係 (#2/3)

- グラフGの点・辺・面
 - 点: $n=5$ 個
 - 辺: $m=7$ 本
 - 面: $f=4$ 個
- グラフG*の点・辺・面
 - 点: $n^*=4$ 個
 - 辺: $m^*=7$ 本
 - 面: $f^*=5$ 個
- 確かに $n^*=f=4$ 、 $m^*=m=7$ 、 $f^*=n=5$ が成り立つ。



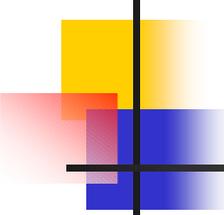
グラフとその双対グラフの点・辺・面の関係 (#3/3)

- [証明]
- 「グラフGの各面に双対グラフの点を打つ」から、 $n^* = f$ は成り立つ。 ←(1)
- また、「グラフGの各辺に交差するように双対グラフの辺を引く」から、 $m^* = m$ は成り立つ。 ←(2)
- そして、グラフGとその双対グラフG*において、オイラーの公式を考える。
 $n - m + f = 2$ かつ $n^* - m^* + f^* = 2$ ←(3)
- (1)~(3)より、 $f^* = n$ が成り立つ。 □



双対グラフの双対グラフ

- 定理15.2
 - グラフ G が連結平面ならば、 G^{**} はグラフ G と同型である。
- つまり、双対グラフの双対グラフは元に戻るということをいっている。
- 直観的に明らか。ただし、平面以外で連結だとそうはいえないことに注意。



Gの閉路と G^* のカットセット(#1/4)

- 定理15.3

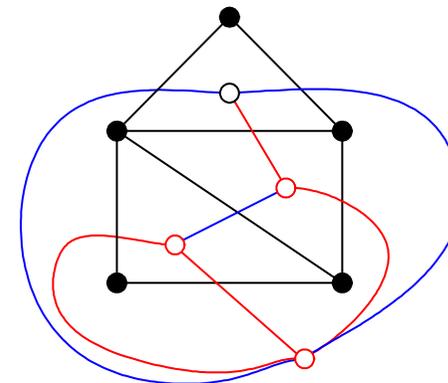
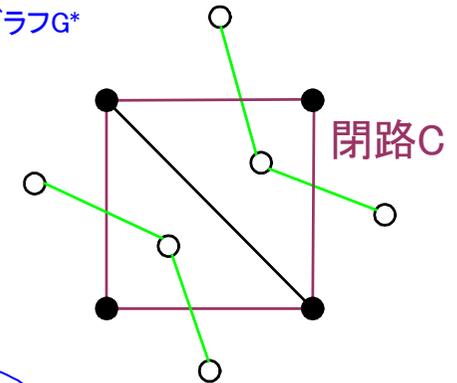
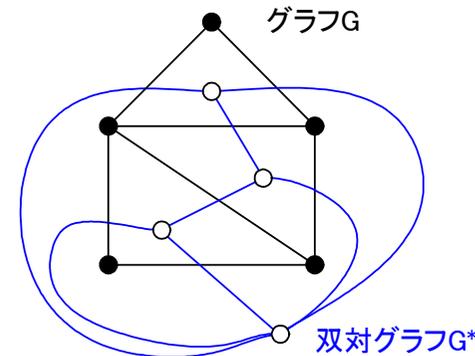
- 平面グラフGの双対グラフを G^* とする。このとき、次が成り立つ。
「グラフGの辺を含む辺集合が(Gにおいて)閉路である」 \Leftrightarrow 「(その)辺集合が、グラフ G^* においてカットセットになる」

- カットセット (cut set)

- 文字通りグラフをカット(分割)するための辺の集合 (set) のこと。
- 連結グラフを非連結グラフにするような辺の集合。

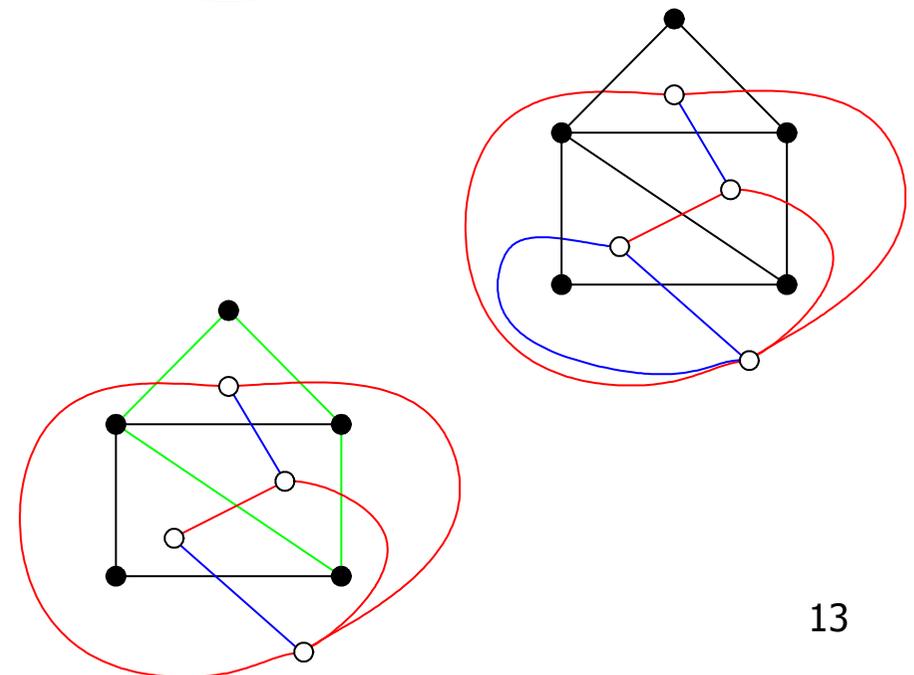
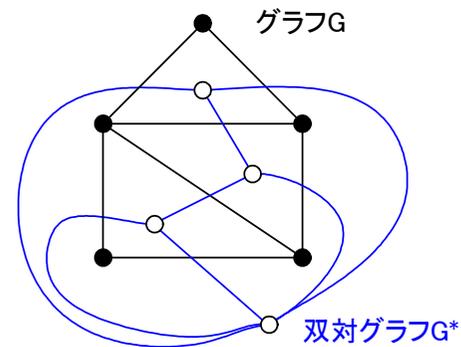
Gの閉路とG*のカットセット(#2/4)

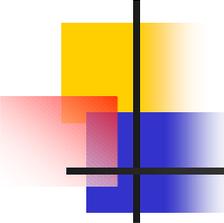
- 証明の前に \Rightarrow を確認する。
 - 確認で使うテクニックが証明で使われる。
- 上図のグラフGの辺を含む辺集合を選び、それが閉路だったとする。
- 閉路C(紫色)に含まれる面に白点を打つ。そして、その点から閉路の辺それぞれに1本線を引く。
 - 中央図の緑色の辺がそれ。
- その緑色の辺がG*では下図の赤色の辺に対応する。
- この赤色の辺を除くと、G*は2つに分割される。
 - 青色のグラフが2つできた。



Gの閉路とG*のカットセット(#3/4)

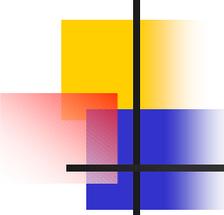
- 証明の前に←を確認する。
- (上図の)G*のカットセットを考える。
 - 中央図の赤色の辺はG*のカットセットの1つである。
- 赤色の辺と交差しているGの辺(下図)を緑色にする。
 - 緑色の辺はGの閉路の一部になっている。





Gの閉路と G^* のカットセット(#4/4)

- [証明]
- [1] \Rightarrow を示す。
 - Gの任意の閉路Cを選ぶ。
 - Cの中には面が1つ以上存在する。それらの面の中に点を置き、 G^* の点 v^* に対応させる。
 - この点 v^* と「Cを構成する各辺」を交差させるように新たな辺を引き、これを G^* の辺に対応させる。
 - この手続きによって得られた辺を G^* から除去すると、Gは閉路Cの外と中は分離される。
- [2] \leftarrow を示す。
 - 以上の手続きを逆に辿ることができる。 □

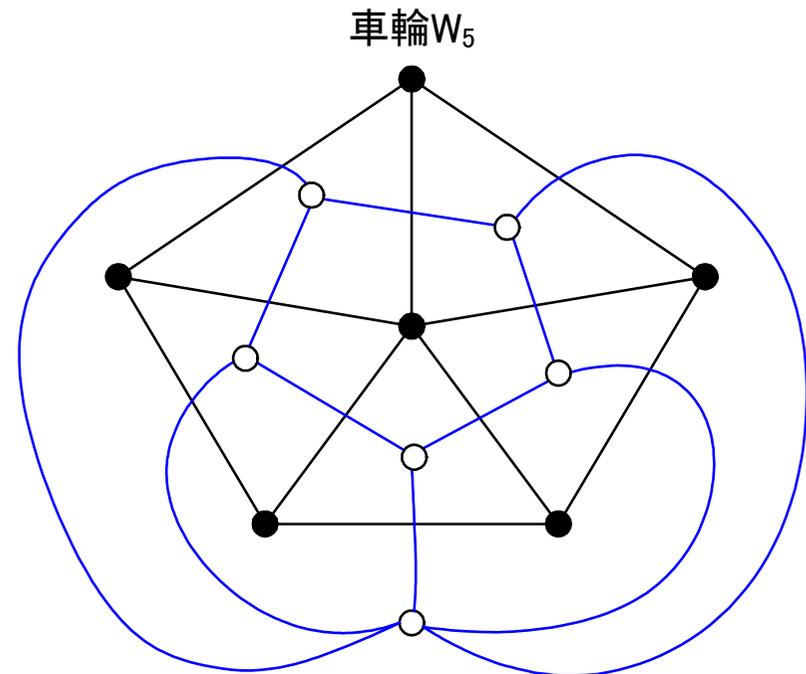


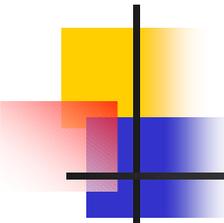
Gのカットセットと G^* の閉路

- 系15.4
 - 「グラフ G の辺集合が G のカットセットである」 \Leftrightarrow 「対応する辺集合が G^* の閉路になる」
- 定理15.3において、 G と G^* の立場が逆になっただけ。
- [証明]
 - 定理15.3において、 G を G^* 、 G^* を G^{**} とする。
 - 定理15.2から、グラフ G が平面連結ならば、 G^{**} は G と同型。
 - よって、題意が成り立つ。 \square

例題8.8(1) (#1/2)

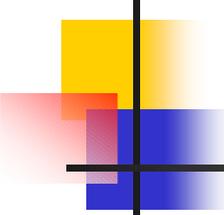
- 車輪の双対は車輪であることを示せ。
- 車輪 W_n
 - $n-1$ 個の点を持つ閉路 C_{n-1} に1つの新しい点 v を加えて、 v と他のすべての $n-1$ 個の点を結んでできるグラフのこと。
- まず、例で確認する。
 - 右図のように、 W_5 の双対グラフ(青色)は、 W_5 になっている。





例題8.8(1) (#2/2)

- W_n の面の数は無限面を除けば、 $n-1$ 個である。この面それぞれに点を置き、それらを結んで閉路 C_{n-1} を作る。
- そして、無限面に1点を置き、 C_{n-1} と結ぶと、 W_n ができる。□
- [考察]
 - 車輪 W_n の面の数 $=n-1$ 個 $+1$ 個(無限面) $=n$ 個
 - 補題15.1の「 $n^*(W_n^*$ の点の数) $=f(W_n$ の面の数)」が成り立つから、双対グラフ W_n^* の点の数 n^* は n 個になる。

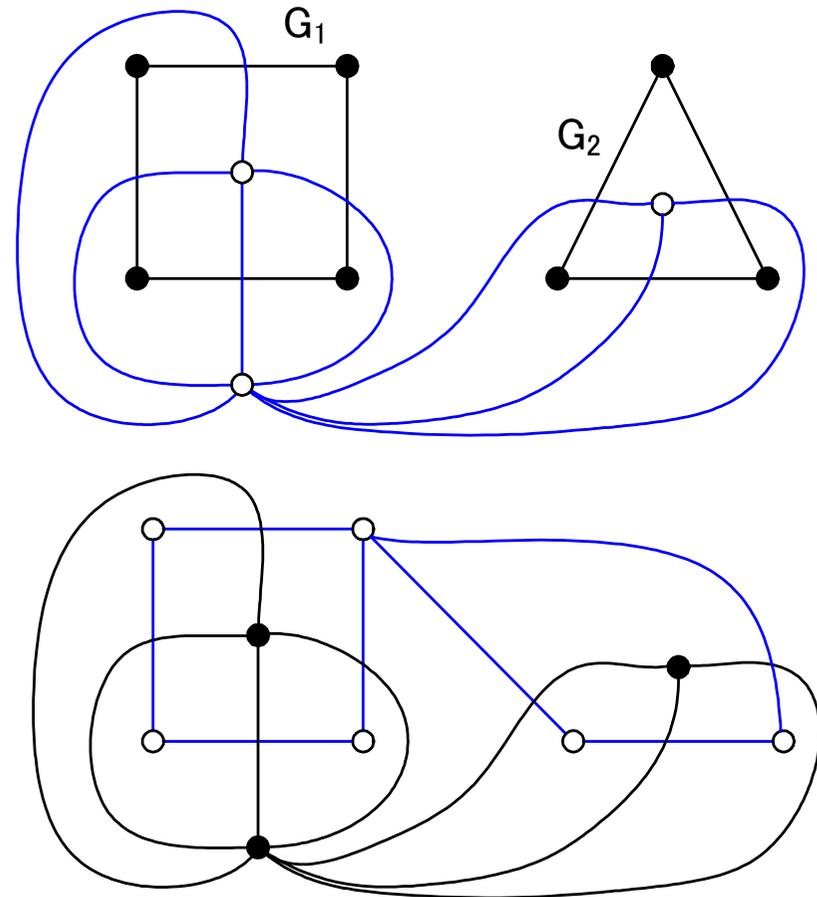


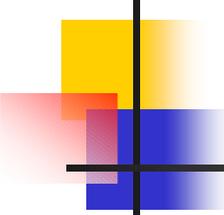
例題8.8(2) (#1/2)

- 平面グラフ G が非連結ならば、 G^{**} は G に同型ではないような例を示せ。
- 定理15.2では「グラフ G が平面連結ならば、 G と G^{**} (G の双対グラフの双対グラフ)は同型である」ことを示した。
 - 今回は連結でないので、同型ではない例が存在するかもしれない、その例を示せという問題である。

例題8.8(2) (#2/2)

- 上図のような G_1 と G_2 で構成される非連結グラフ G を考える。
- 上図の青色が G の双対グラフ G^* である。
- 下図の青色が G^* の双対グラフ G^{**} である。
- 明らかに G とは G^{**} 同型でない。
 - G は非連結グラフだったのに、 G^{**} は連結グラフになっている。



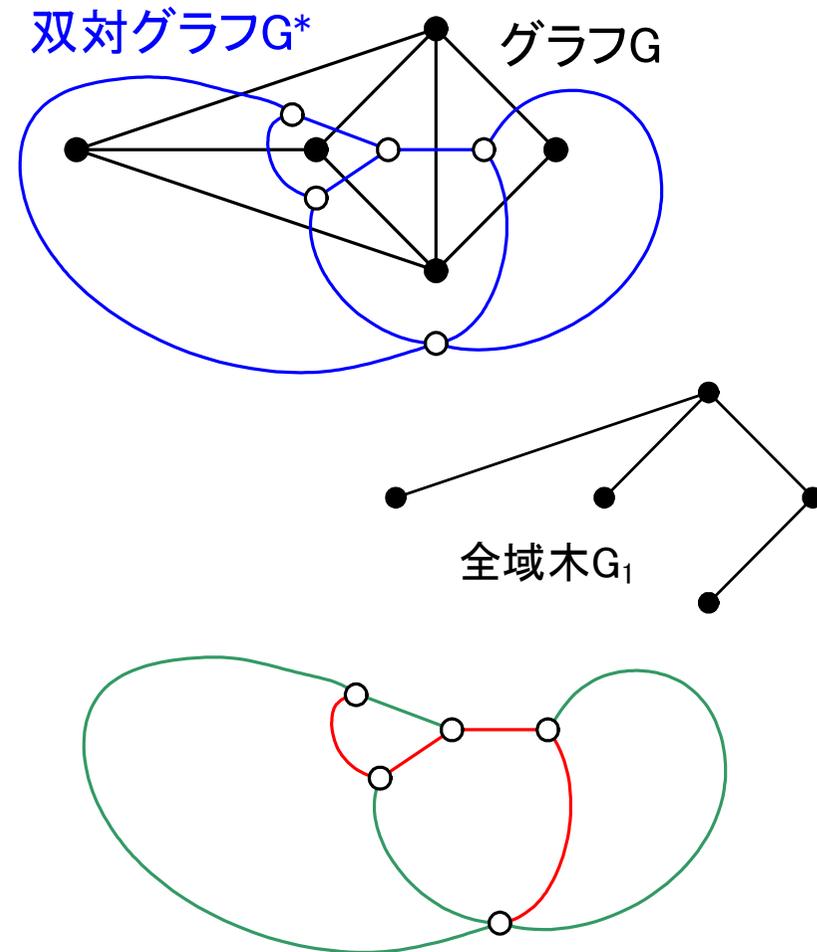


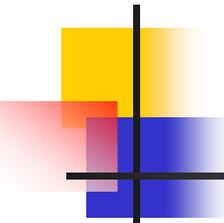
例題8.8(3) (#1/2)

- G が連結な平面グラフであるとき、 G の全域木は G^* のある全域木の補グラフに対応することを例で示せ。
- 全域木
 - グラフの点をすべて含むような部分木のこと。
- (G_1) の補グラフ
 - (G_1) の頂点はそのまま、 (G_1) の2頂点の間に辺があればそれを削除し、逆に辺がなければ追加したグラフのこと。
- 資料の解答は少し間違えているので注意。

例題8.8(3) (#2/2)

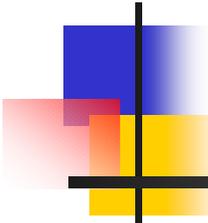
- 上図のようなグラフGを考える。青辺と白丸はGの双対グラフ G^* である。
- (中央図の) G_1 をGの全域木の1つとする。
- (下図の) G_2 (赤色)を G^* の全域木、 G_3 (緑色)を G_2 の補グラフとする。
- G_3 は G_1 と同型になっている。





抽象的双对 (abstract dual)

- 省略



グラフの彩色

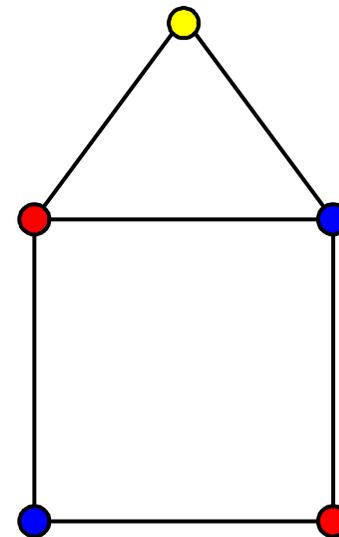
点彩可能

■ k-彩色可能

- k個の色の1つをGの各点に割り当て、隣接するどの2点も同じ色にならないようにできるとき。

■ 隣接

- 1つの辺の両端に来ること。

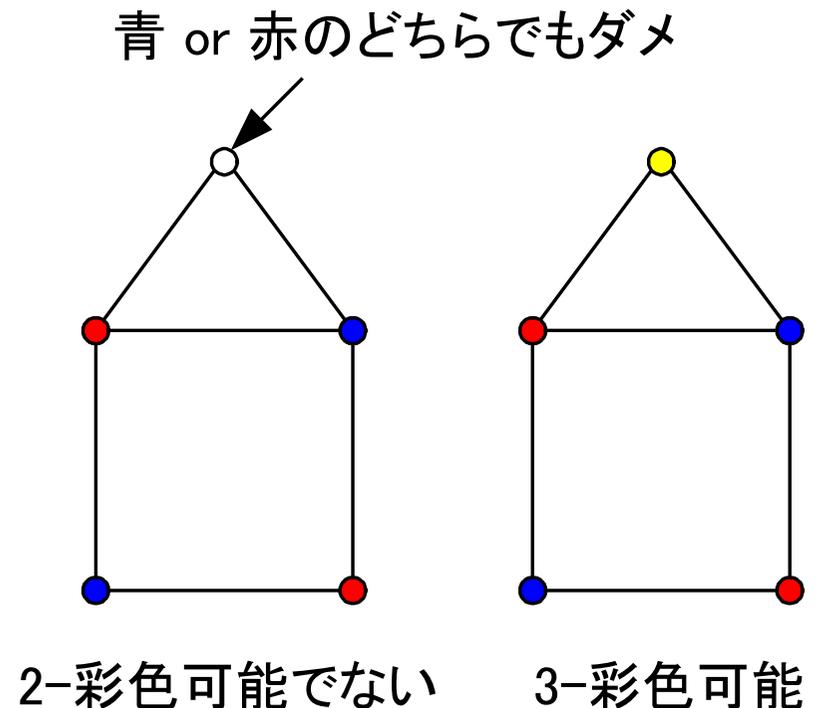


3-彩色可能

4以上でも彩色可能である。
定義上すべての色を使うという規則はない。

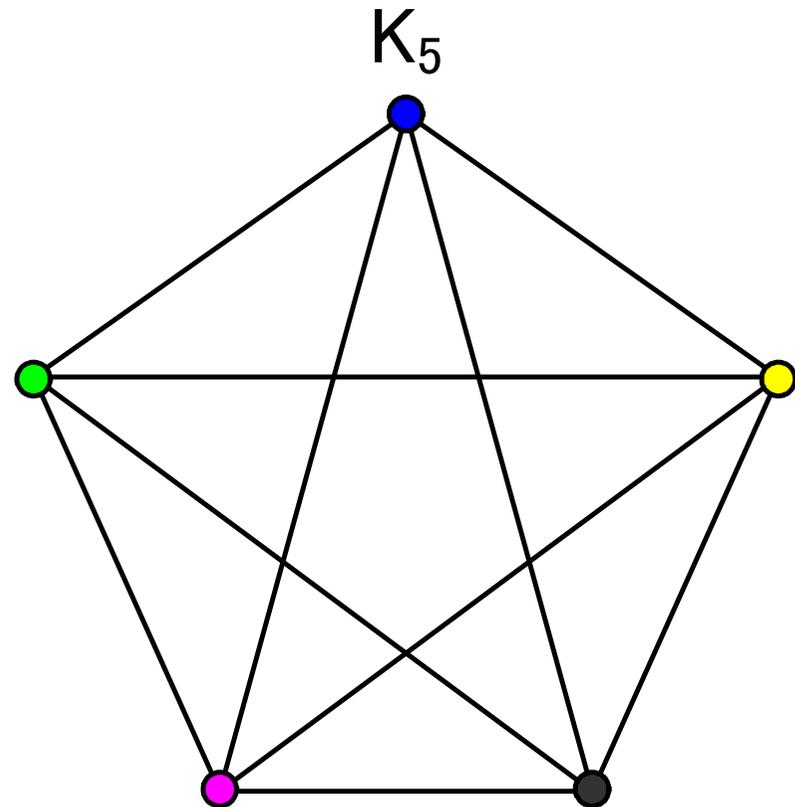
k-彩色可能

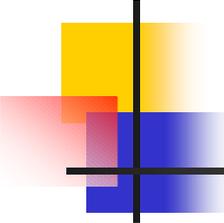
- k-彩色可能
 - グラフGがk-彩色可能であるが、(k-1)-彩色不可能であるとき。
- このとき、Gの彩色数はkである。
 - 「 $\chi(G)=k$ 」と表記する。
 - χ 【カイ】
- 右図は2-彩色可能でない。3-彩色可能なので、3-彩色的である。
 - つまり、 $\chi(G)=3$



完全グラフの彩色数

- K_n : (n個の点からなる) 完全グラフ
 - 相異なる2つの点が全て隣接している単純グラフ。
- $\chi(K_n) = n$
 - 点はすべて隣接しているので、点の数分だけ色がなければ彩色できない。

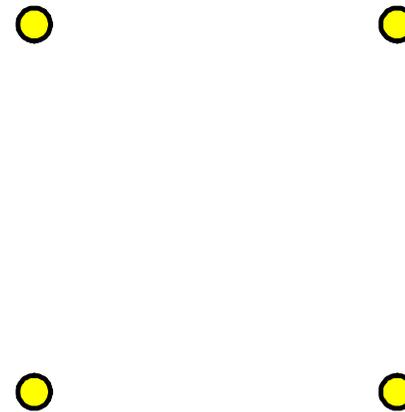




空グラフの彩色数

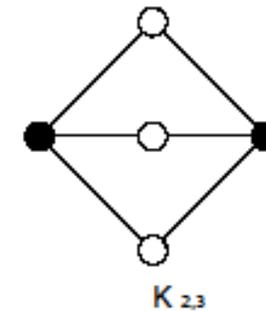
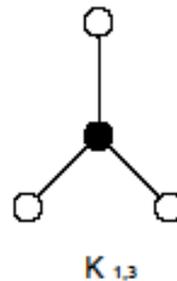
- N_n : (n個の点を持つ)
空グラフ
 - 辺集合が空であるグラフ。
- $\chi(N_n)=1$
 - 辺そのものが存在しないので、隣接するものは存在しない。
 - よって、1色だけで彩色可能。

N_4

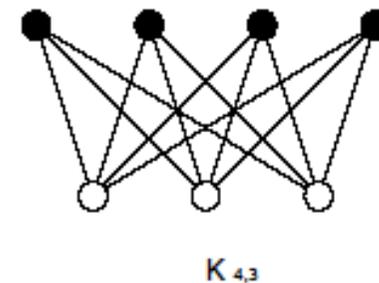
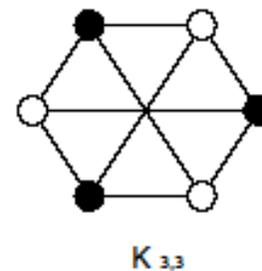


完全2部グラフの彩色数

- $K_{r,s}$: 完全2部グラフ
 - Aの各点がBの各点とちょうど1本の辺で結ばれている2部グラフ。

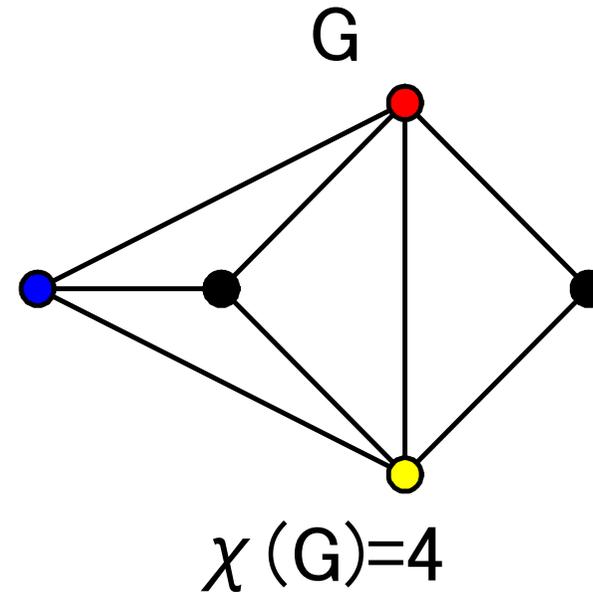


- $\chi(K_{r,s})=2$
 - グループA,Bそれぞれに1色割り当てればよい。



単純グラフの最大次数と彩色可能(#1/2)

- 定理17.1
 - 単純グラフGの最大次数が Δ ならば、グラフGは $(\Delta + 1)$ -彩色可能である。
- 最大次数
 - 点に繋がっている辺の最大数
- 証明の前に例で確かめてみる(右図)。
 - Gの最大次数 $\Delta(G)=4$
 - Gは $(\Delta + 1)=5$ で彩色可能
 - Gは実は4-彩色的だから、4-彩色可能でもある。
 - 定理17.1では非連結も含めているので、連結グラフに対してブレが少しでている。連結グラフに関してもっと精密に彩色可能である数を求めたい場合は、後述する定理17.2を参照。



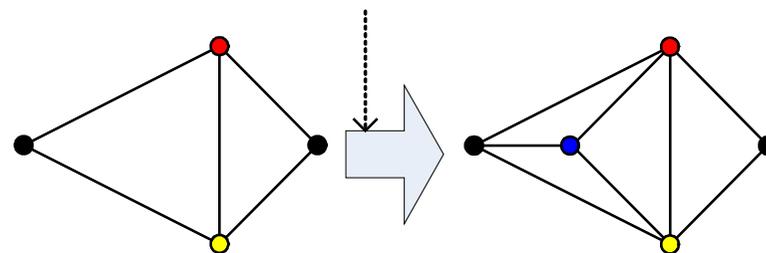
単純グラフの最大次数と彩色可能(#2/2)

- [証明] 数学的帰納法
- [1] $\Delta(G_0)=0$ のとき、明らかに G_0 は 1-彩色可能 (上図)。
- [2] $\Delta(G_k)=k$ のとき、 G は $(k+1)$ -彩色可能であると仮定する。
 - このとき $\Delta(G_{k+1})=k+1$ のとき、 G_{k+1} は $(k+2)$ -彩色可能であることを示したい。
 - G_k に 1 点を追加したグラフを G とすると、最大次数 $\Delta(G)=k+1$ になる (k のままであることもあるが、数の大きい $k+1$ を優先する)。よって $G = G_{k+1}$ と表記する。
 - また、 G_k は $(k+1)$ -彩色可能なので、新しい点を追加したと考えれば、 G_{k+1} は $(k+2)$ -彩色可能になる (下図)。
- 従って、[1][2] より、題意が成り立つ。
□



$\Delta(G)=0$ を満たす
単純グラフ G

青色 (新しい色) の 1 点を追加



$(k+1)$ -彩色可能なグラフ

$(k+2)$ -彩色可能なグラフ

単純連結グラフの最大次数と彩色可能

■ 定理17.2

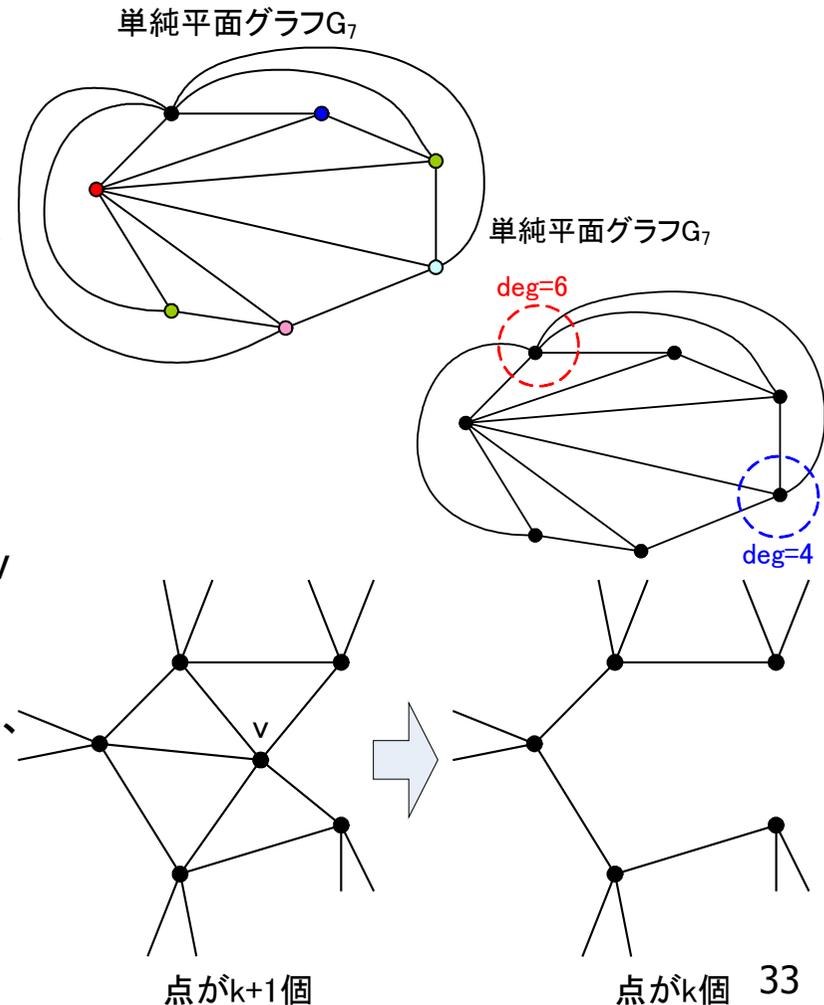
- グラフ G は単純連結グラフであり、完全グラフでないとする。
このとき、グラフ G の最大次数が $\Delta (\geq 3)$ であるならば、 G は Δ -彩色可能である。
- 完全グラフのときはこの定理が成り立たないことを確認する。
 - $\chi(K_n)=n$ が常に成り立つ(確認済み)ので、 K_n は n 以上で彩色可能。
 - 一方、 K_n の最大次数は定義より $\Delta(K_n)=n-1$ になる。
 - この定理では $(n-1)$ -彩色可能であるといっているが、実際には n -彩色可能で、 $(n-1)$ -彩色不可能なので、定理の結果を満たさない。
- 証明は省略。

単純平面グラフと6-彩色可能 (#1/2)

- 定理17.3
 - すべての単純平面グラフは6-彩色可能である。
- 単純グラフ
 - グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つの辺で結ばれているグラフ
- 平面グラフ
 - どの2つの辺も、それが接続する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ
- 平面グラフという制限がなければ、完全グラフも許されてしまう。

単純平面グラフと6-彩色可能 (#2/2)

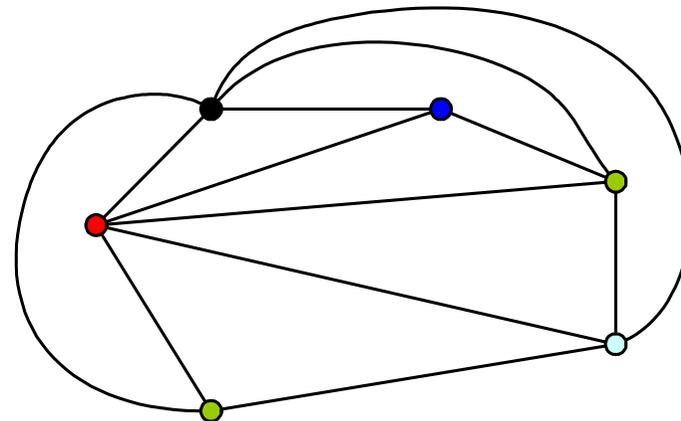
- [証明] 数学的帰納法
- G は $n (> 6)$ 個の点を持つ単純平面グラフとする。
- [1] $n=7$ のとき、単純平面グラフ G_7 (上図。一番複雑) は6-彩色可能。
- [2] $n=k$ のとき、題意が成り立つと仮定する。
 - このとき、 $n=k+1$ のときに、 G_{k+1} が6-彩色可能であることを示したい。
 - 定理13.6「すべての単純平面グラフには次数5以下の点がある」より、 G_{k+1} には5次以下の点 v が存在する(中央図)。
 - このとき、 v と v に接続する辺を除去すると、残りのグラフには、 k 個の点しかない(下図)。よって、仮定より、6-彩色可能。
 - v に隣接している5個以下の点とは異なる色(少なくとも1色は残っているはず)で v を彩色すれば、 G_{k+1} は6-彩色可能。
- 従って、[1][2]より、題意が成り立つ。 □



単純平面グラフと5-彩色可能 (#1/2)

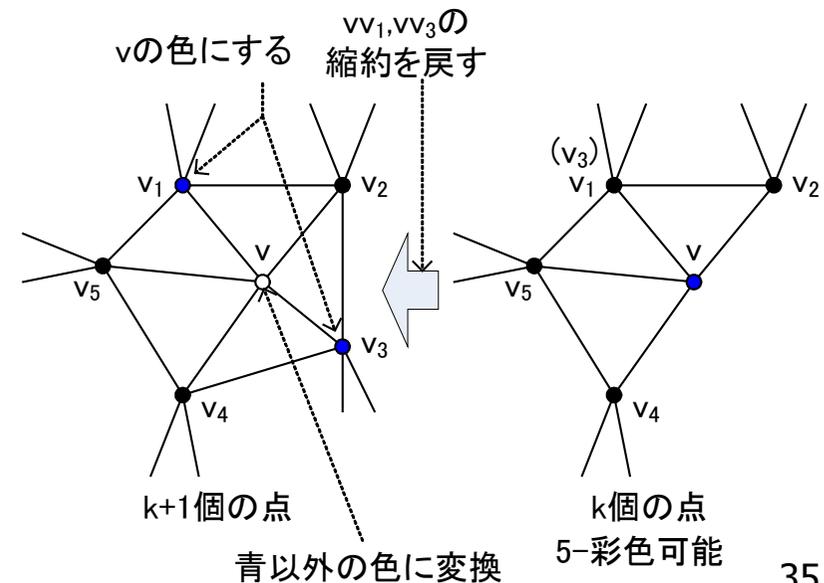
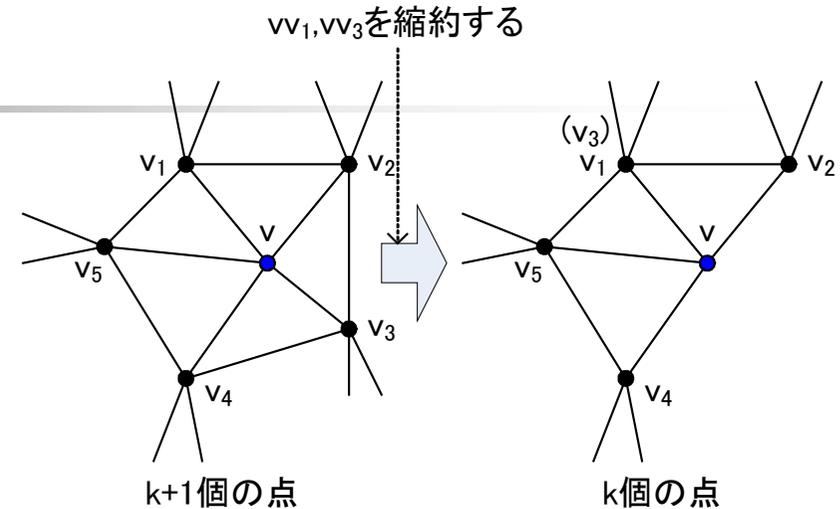
- 定理17.4
 - すべての単純平面グラフは5-彩色可能である。
- 定理17.3よりも精密な定理である。
 - つまり、証明は定理17.3よりも難しいと予測できる。

単純平面グラフ G_6

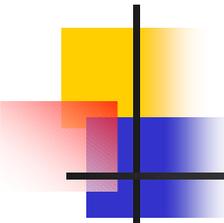


単純平面グラフと5-彩色可能 (#2/2)

- [証明] 数学的帰納法
- G は $n (> 5)$ 個の点を持つ単純平面グラフとする。
- [1] $n=6$ のとき、単純平面グラフ G_6 (前ページの図。一番複雑) は5-彩色可能。
- [2] $n=k$ のとき、題意が成り立つと仮定する。
 - このとき、 $n=k+1$ のときに、 G_{k+1} が5-彩色可能であることを示したい。
 - 定理13.6「すべての単純平面グラフには次数5以下の点がある」より、 G_{k+1} には5次以下の点 v が存在する。よって、 $\deg(v) < 5$ ならば証明は終わる。
 - そこで、 $\deg(v)=5$ の v で考える。そして、 v_1, \dots, v_5 が v のまわりに配置されているとする。ここで、 v_1, \dots, v_5 がすべて隣接してしまうと完全グラフ K_5 になってしまうので、すべて隣接しないとする。
 - 2つの辺 vv_1, vv_3 を縮約すると平面グラフができて、それには高々 $n-1$ 個しか点がないので仮定より5-彩色可能になる(上図)。
 - 点 v に当てられた色で v_1, v_3 を彩色し、点 v を元々割り当てられた色以外で彩色しなおせば G_{k+1} の5彩色が完成する(下図)。
- 従って、[1][2]より、題意が成り立つ。 □

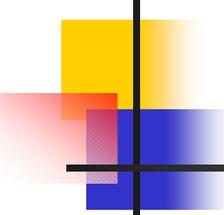


∴ 5-彩色可能



単純平面グラフと4-彩色可能

- 定理17.5
 - すべての単純平面グラフは4-彩色可能である。
- 証明は当然略する。
- この定理は4色問題と同値。
 - 1852年に法科学士のフランシス・ガスリーが数学専攻である弟のフレデリック・ガスリーに質問したのを発端に問題として定式化された。
 - 1879年、アルフレッド・ブレイ・ケンプによる証明が『アメリカ数学ジャーナル』誌上で発表された。この証明は妥当と見なされていたが、1890年になってパーシー・ヘイウッドにより不備が指摘された。
 - 1976年に ケネス・アッペルとウルフガング・ハーケンによってコンピュータを駆使して証明された。100年以上経ってやっと解決された。
 - しかし、あまりに複雑なプログラムのため他人による検証が困難であることや、コンピュータの誤りの可能性を考慮して、この証明に疑問視する声があった。
 - その後、プログラムの改良が進められており、現在4色問題の解決を否定する専門家はいない。

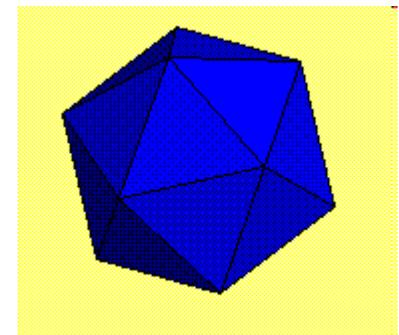
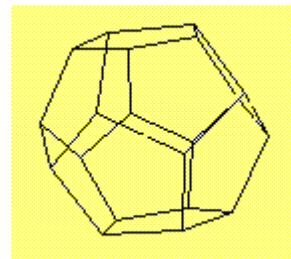
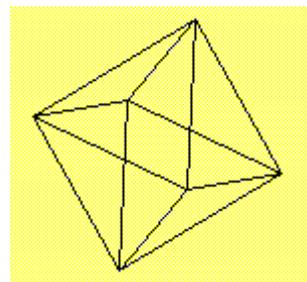
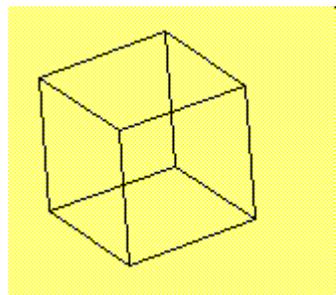
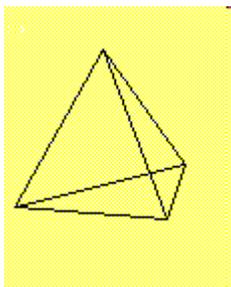


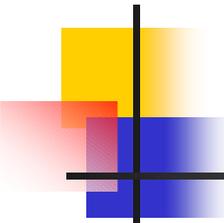
例題9.1、例題9.2

- 例題9.1、例題9.2は略する。

例題9.3(1) (#1/3)

- 例題9.3(1)
 - 各プラトングラフの彩色数を求めよ。
- プラトングラフ
 - 正4面体、正6面体、正8面体、正12面体、正20面体を3次元のグラフで考えたもの。
 - 画像は <http://www.ngm.ed.ynu.ac.jp/student/poly/poly3/poly3.htm> から引用。

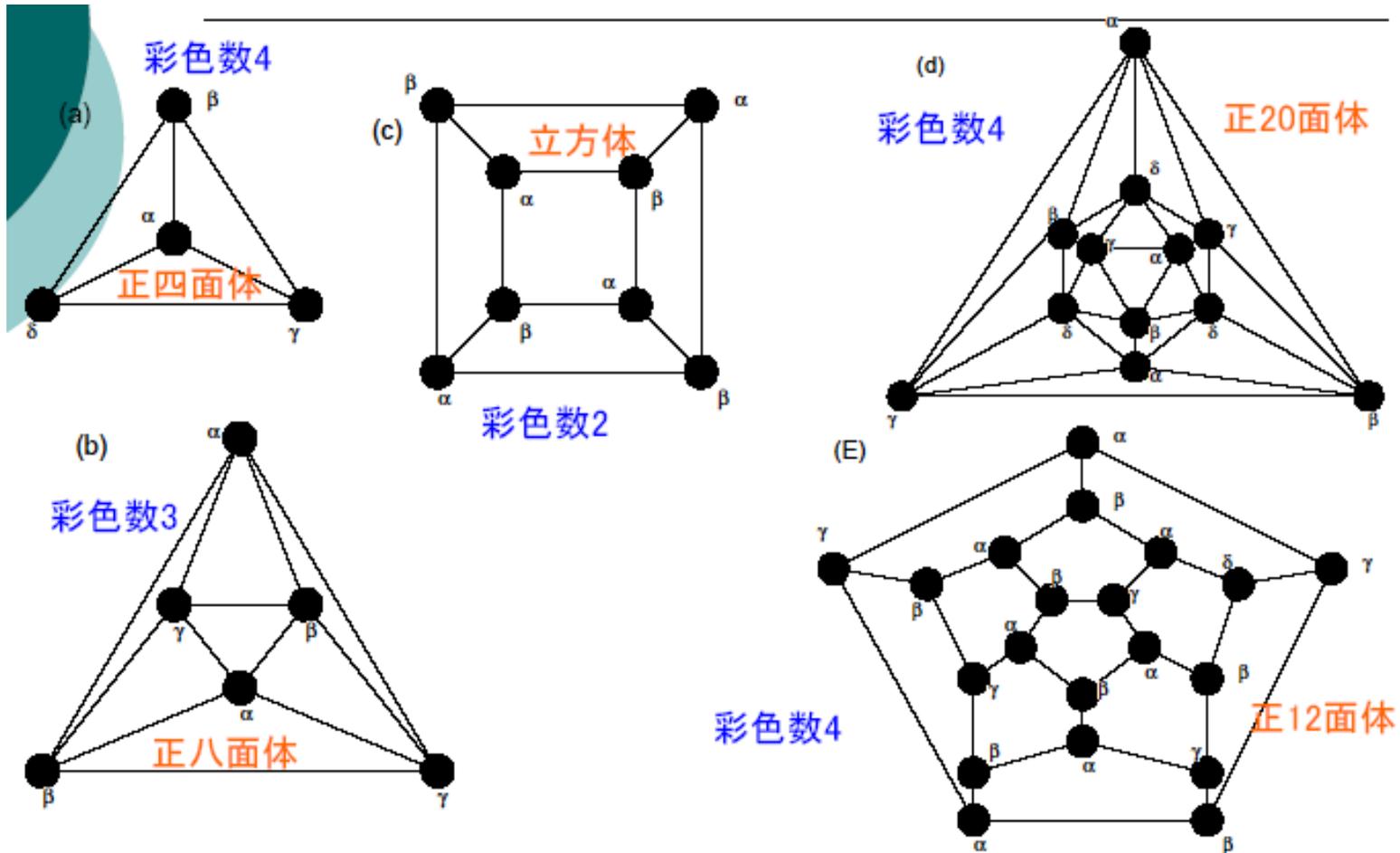


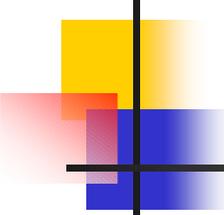


例題9.3(1) (#2/3)

- 5種類のプラトングラフはすべて平面描画可能である。
- よって、定理17.5より、彩色数は最大でも4であることに注意する。
- $\chi(\text{正4面体})=4, \chi(\text{正6面体})=2, \chi(\text{正8面体})=3, \chi(\text{正12面体})=4, \chi(\text{正20面体})=4$
 - 実際の塗り分けは、次のスライドに示す。
 - スライドの画像は元資料のパワポ版から抜粋。
 - $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を色だと考える。

例題9.3(1) (#3/3)





例題9.3(2)

- 完全3部グラフ $K_{r,s,t}$ の彩色数を求めよ。
- 完全3部グラフの定義から、 $\chi(K_{r,s,t})=3$
 - 3つの各グループで色分けすればよい。

例題9.3(3)

- k -立方体 Q_k の彩色数を求めよ。
- k -立方体
 - $a_i=0,1$ であるような1つの列ベクトル (a_1, a_2, \dots, a_k) に1つの点を対応させ、1つだけ異なる成分を持つ2つのベクトルに対応する2つの点が辺で結ばれるような正則2部グラフ
- 正則グラフ
 - どの点の次数もすべて共通であるグラフ
- 正則2部グラフの彩色数は2なので、 $\chi(Q_k)=2$ になる。

