SAS 第 6 回
— 木とその数え上げ —

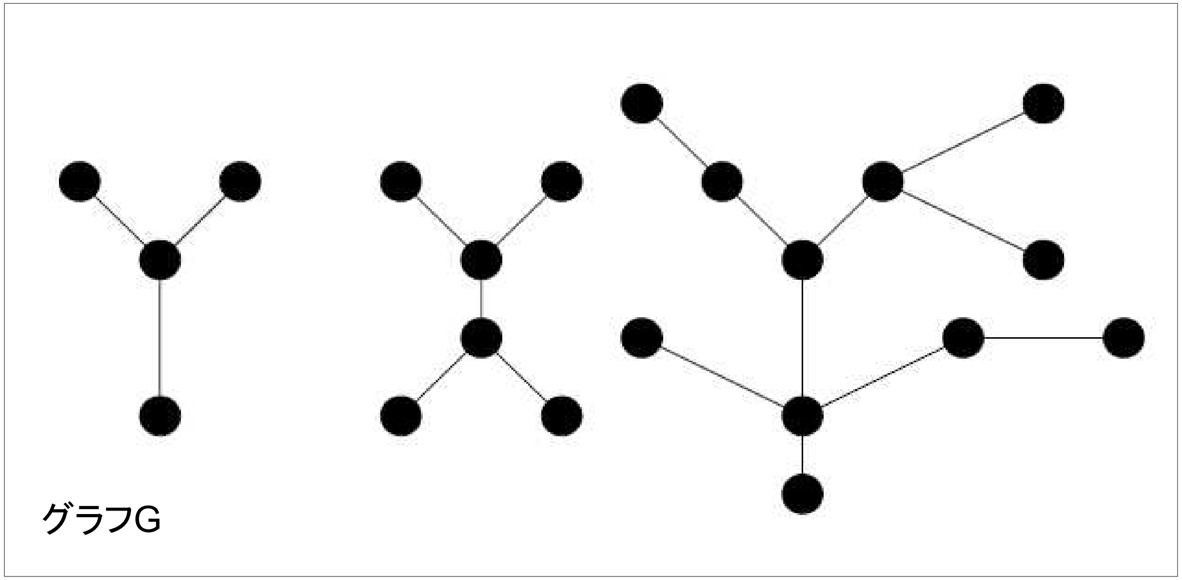
cake clothoid

March 16, 2007

林と木

林（**forest**）　閉路を含まないグラフのこと
木（**tree**）　連結な林のこと

以下の例では，グラフ G が林であり，3 つの成分各々が木である。



木の基本的な性質

定理 1. 点 n からなるグラフ T を考えるとき，次の各命題は同値である

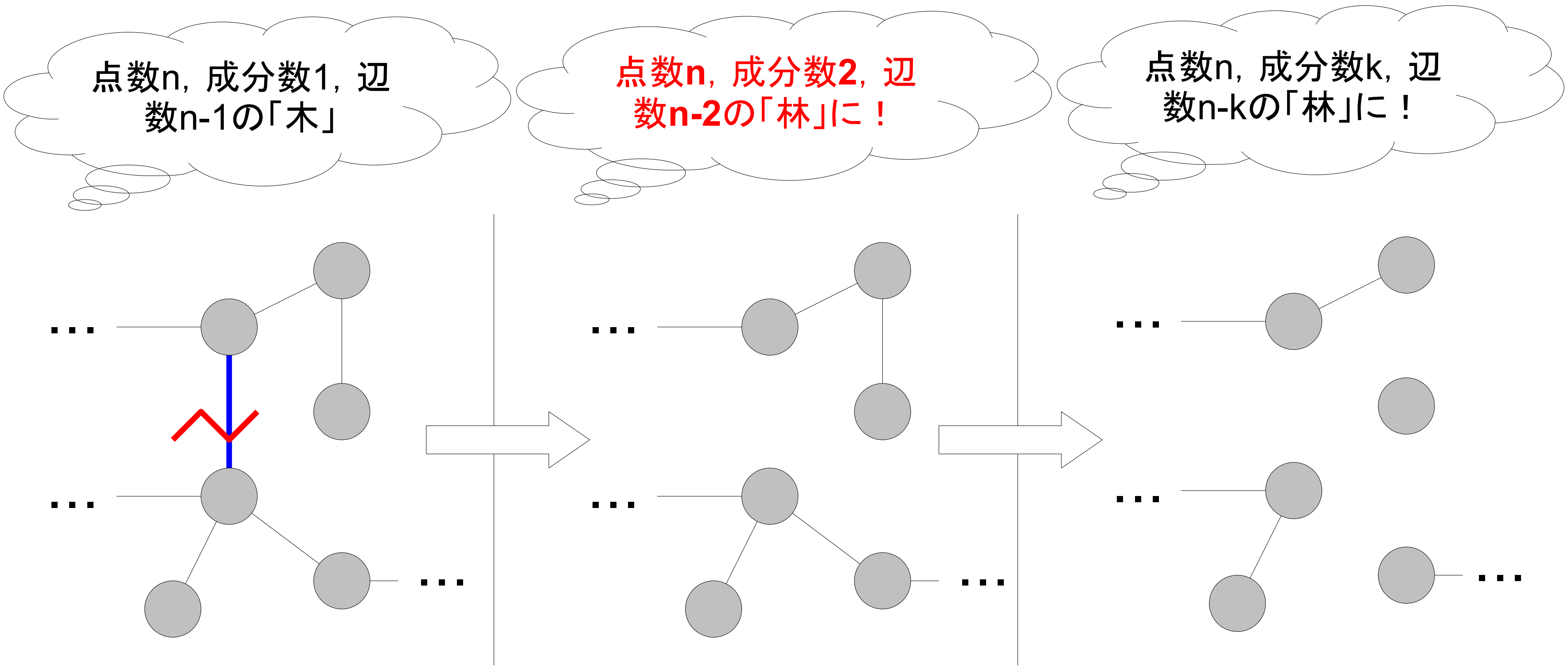
1. T は木である
2. T には閉路は無く，辺が $n-1$ 本ある
3. T は連結であり，辺が $n-1$ 本ある
4. T は連結であり，全ての辺は「橋」である
5. T の任意の 2 点を結ぶ道はちょうど 1 本である
6. T に閉路は無いが，新しい辺をどのように付け加えても閉路ができ，しかも，1 個の閉路である。

木の基本的な性質

系 2. 林 G には n 個の点と k 個の成分があるとする。このとき, 林 G には $n-k$ 本の辺がある

証明. n 個の点をもつ「木」G を考える（次ページ図参照）。木 G の成分数は 1 である。また，定理 1 より，木 G の辺の数は $n-1$ 本であり，全ての辺は「橋」である。したがって，木 G の辺（橋）を 1 本切断すると，成分数は 1 つ増え，木 G は成分数 2 の「林」となる。この時の辺の数は，木 G から切断した辺の数を引いて $(n-1)-1=n-2$ 本となる。いま，木 G から，$k-1$ 本の辺を切断すれば，成分数が $k(=1+k-1)$ の「林」となる。この時の辺の数は，木 G から切断した辺の数を引いた $(n-1)-(k-1)=n-k$ 本である。以上から題意が満たされる。 (証明終)

木の基本的な性質



青い辺（橋）を切断！　　**k-1**回繰り返すと・・・

木の基本的な性質

系 **3.** 単点でない木は，少なくとも 2 点の端点を含む

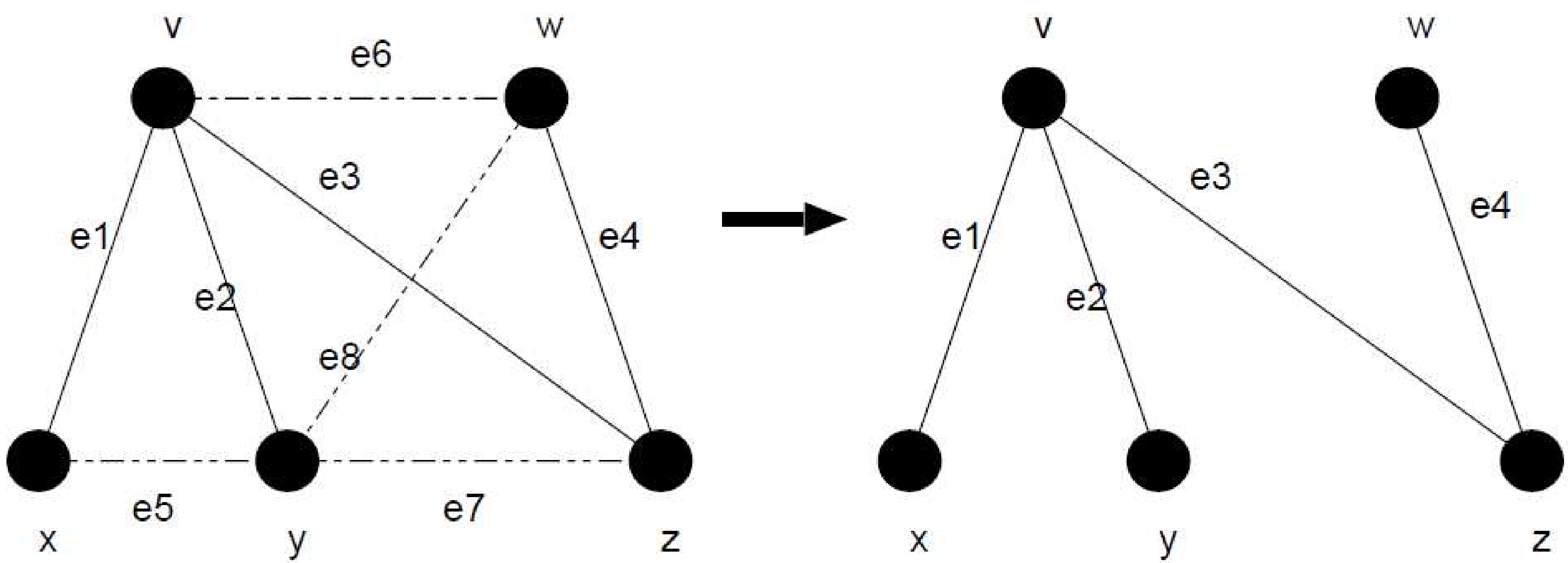
説明
まず，端点が 0 個の木があると仮定する。端点が 0 個であることは閉路があることと同じであるから，木の定義に合わなく矛盾。したがって，端点は 0 個ではない。
次に，端点が 1 個の木があると仮定する。単点でないから，この端点の次数は 1 である。いま，この唯一の端点を除去してみる。すると，残ったグラフには閉路があるはずである（次ページ図参照）。なぜなら，除去した端点が唯一の端点であったから。木には閉路があってはならないから，これは矛盾。したがって，端点は 1 ではない。

端点と閉路

全域木

あるグラフに対し，閉路が無くなるまで辺を除去して得られるグラフを全域木という。

e_5–e_8 を除去して得た全域木の例



全域林

n 個の点と m 本の辺，k 個の成分があるとして，G の各成分に対して，閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返して得られるグラフを全域林という。

（グラフ G に対して）

閉路階数（**cyrcle rank**）$\gamma(\mathrm{G})$

全域林を得るまでに切断しなければならない辺数

カットセット階数（**cutset rank**）$\xi(\mathrm{G})$

全域林[1]の辺数

[1]元資料の誤植?

$\gamma(\mathrm{G})$ と $\xi(\mathrm{G})$ の関係

n 個の点と m 本の辺，k 個の成分があるグラフ G を考える。
このとき，系 2を用いて，

$$\begin{aligned}\gamma(\mathrm{G}) &= (\text{G の辺の数}) - (\text{G から作られる全域林}^{2}\text{の辺の数}) \\ &= m - (n - k) = m - n + k\end{aligned}$$

と表される。また，$\xi(\mathrm{G}) = n - k$ であるから，

$$\gamma(\mathrm{G}) + \xi(\mathrm{G}) = m$$

である。

[2] 元資料誤植?

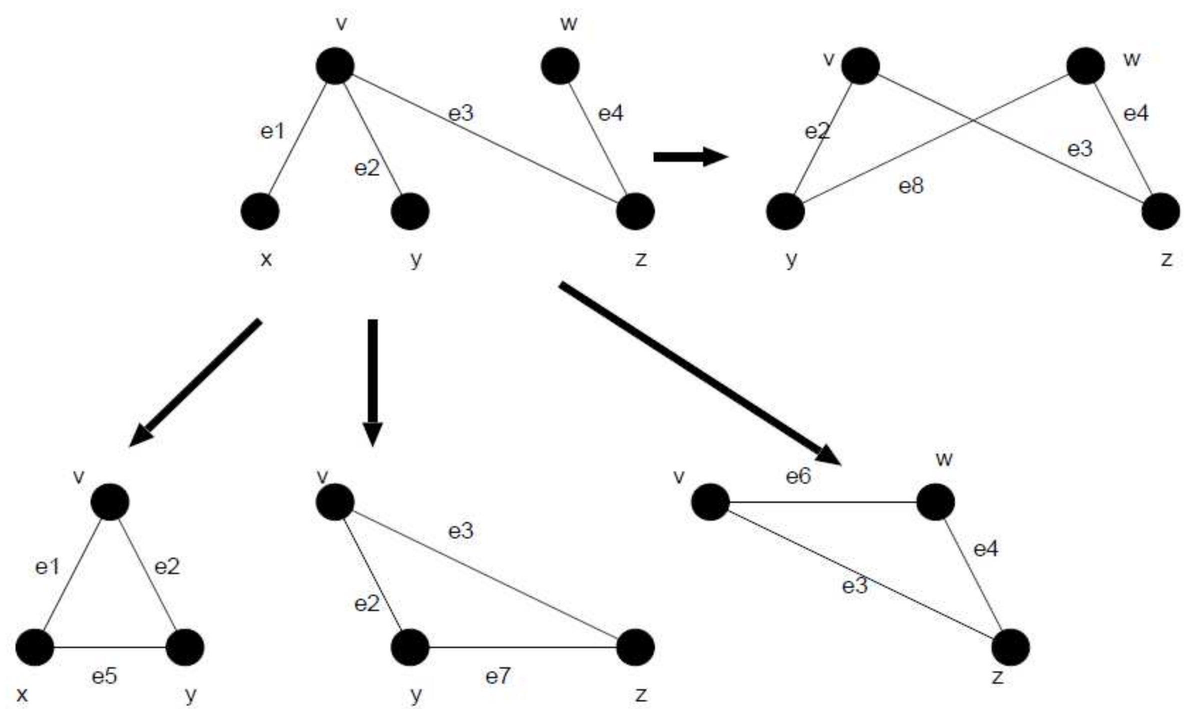
定理 4. Tがグラフ Gの全域林ならば

1. Gの全てのカットセットは Tと共通な辺を持つ
2. Gの全ての閉路は Tの補グラフと共通な辺を持つ

（証明略）

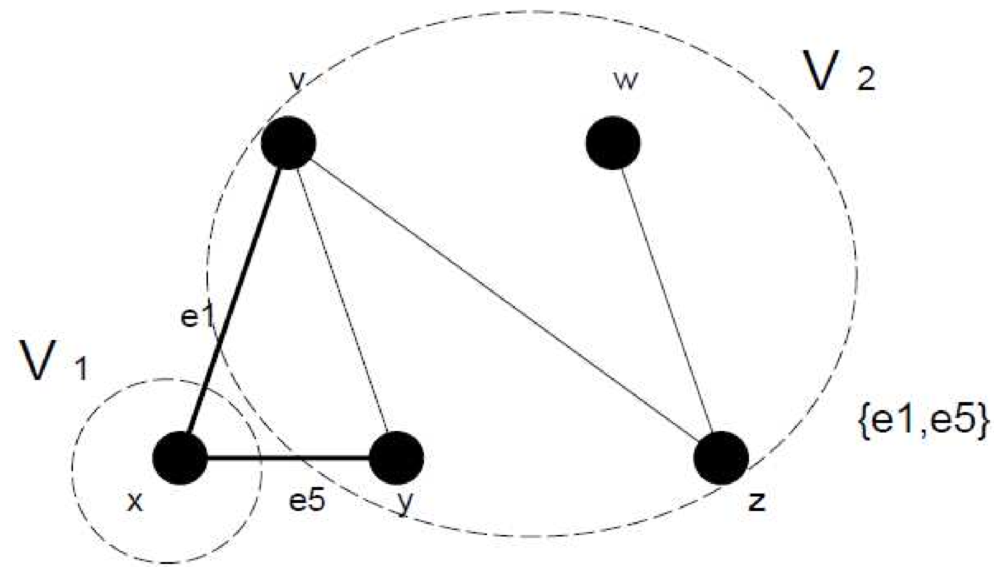
基本閉路集合

Ｔをグラフ G の全域木とする。このとき，Ｔに含まれないＧの任意の辺を一つＴに付加すると, 閉路が一つできる。この操作によりできる閉路の集合を基本閉路集合という



基本カットセット集合

Tを全域木とする。Tの各辺を除去して得られるカットセット集合[3]を基本カットセット集合という



[3]カットセット集合とは，その集合の全要素を用いてのみグラフを非連結化させることのできる辺集合（SAS 第 4 回参照）

例題 7.1—問題

G が連結グラフであるとき，G の中心（centre）とは次のような点 v のことである：v と G の他点の間の距離の最大値ができるだけ小さい。このとき，以下の問いに答えよ。

1. 端点を除去する操作を続けていくことにより，図 95 の木 T の中心を求めよ。
2. どんな木でも中心は 1 つか 2 つであることを示せ。
3. 木の中心が 2 つある場合，それらの 2 点は隣接していることを示せ。
4. 7 点からなる木で，中心が 1 つの木と，2 つの木をそれぞれ一つずつ例示せよ。

例題 7.1 の図

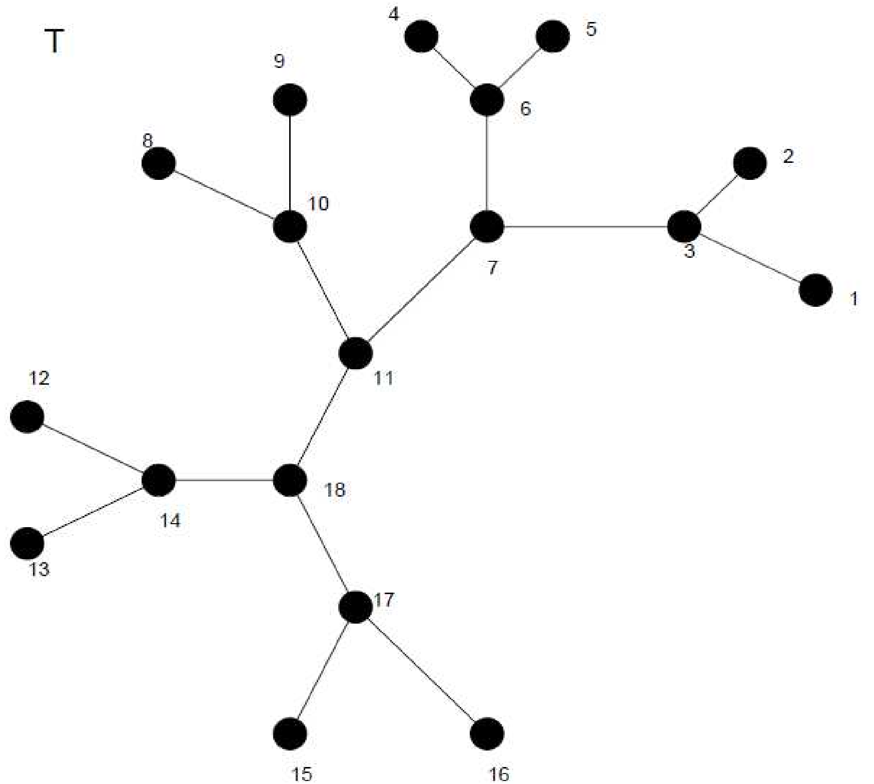
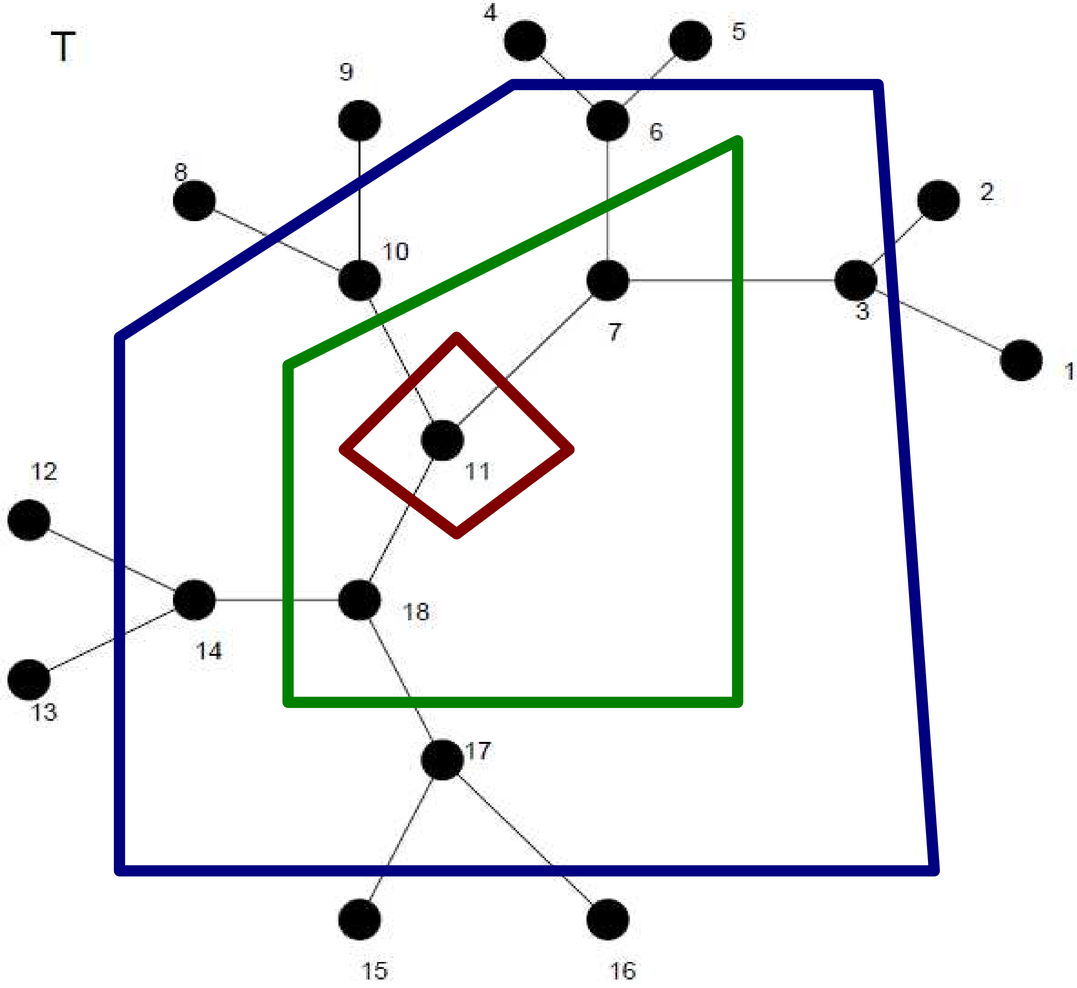


図 95: この木 T の中心を考える.

例題 7.1–解答 1



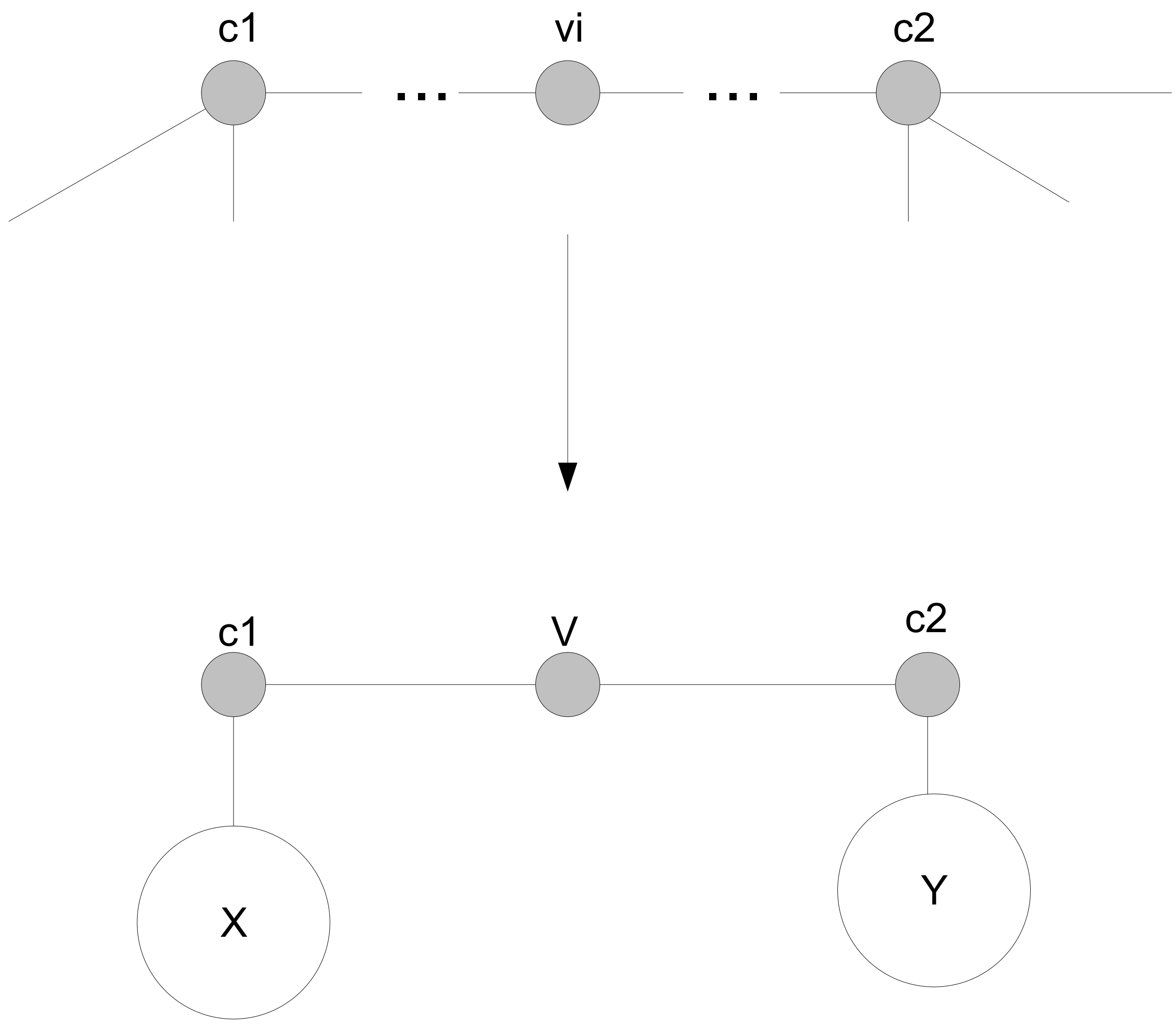
例題 7.1–解答 2

中心は端点を除去する操作を続けて行うことにより求める事が出来る。
単点及び端点が 2 つの場合,「端点を除去する操作」を実行できない。なぜならば，点が無くなってしまうから。点が 3 つ以上ある場合は，端点を除去する操作が可能であり，中心を求めるための操作を続けて行う必要がある。
以上より，題意が成り立つ。

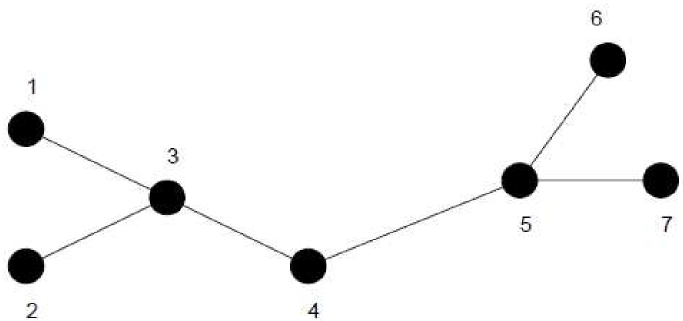
例題 7.1–解答 3-1

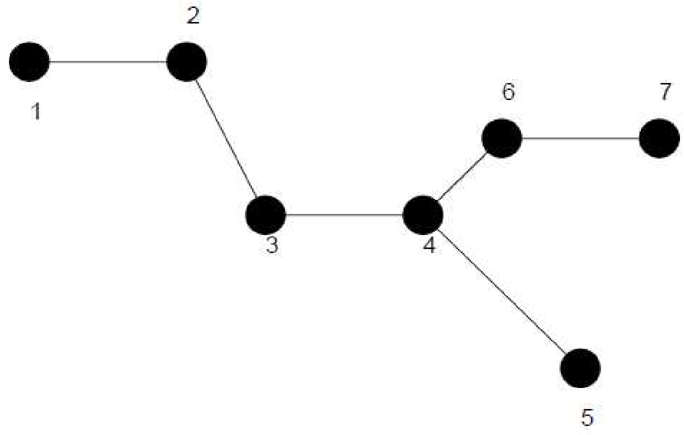
仮に，木の中心 2 を c_1，c_2 とする。
中心の 2 つが隣接していないとすると，c_1 と c_2 はいくつかの点 v_i（$i = 1, 2, \cdots$）を経由して繋がっていると考えられる（次ページ図参照）。
いま，この v_i の各点を縮約し，V とする。また，c_1 と c_2 に繋がっているその他の部分グラフも簡単のため X と Y とする。
このグラフの中心を求めるために，端点を除去する操作を繰り返せば，c_1 と c_2 は除去され，$v_i \in V$ のどれかが中心となる。これは，c_1，c_2 が中心であるという仮定に反する。したがって，木の 2 つの中心は繋がっている。

例題 7.1–解答 3-2



例題 7.1–解答 4





例題 7.2–問題

1. 図 99（次ページ）に示したグラフの全域木を全て描け
2. グラフ G の辺のある集合を C^* とする。どの全域林にも C^* と共通な辺があるならば，C^* にはカットセットが含まれることを例を挙げて示せ

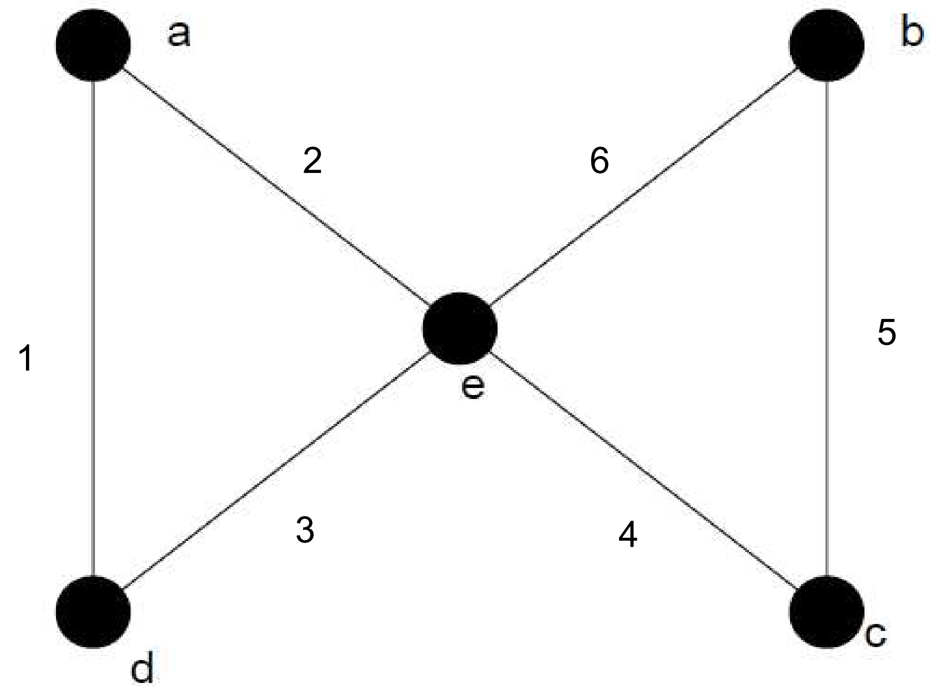
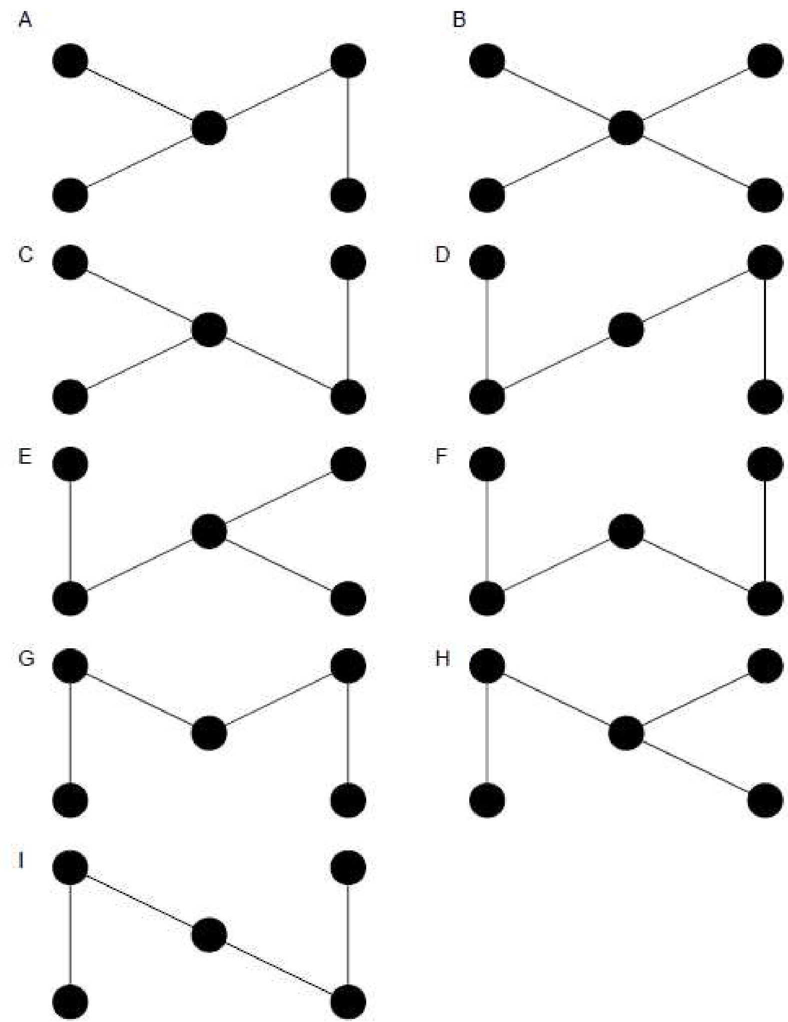


図 99: ここで全域木を考えるグラフ.

例題 7.2–解答 1

定理 1 より，全ての辺が橋となるように選べばよいので，辺 1-3 の中から 1 つ，辺 4-6 の中から一つ，辺を選び削除すれば全域木となる。したがって，3×3 通りあり，図（次ページ）のようになる。

例題 7.2—解答 1-2

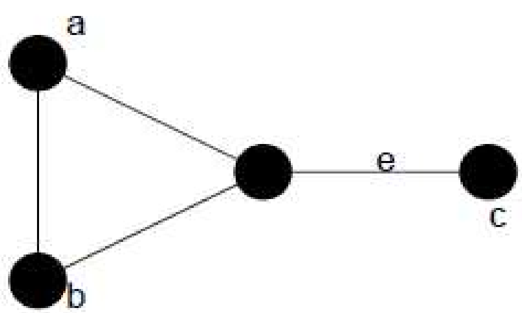


例題 7.2–解答 2-1

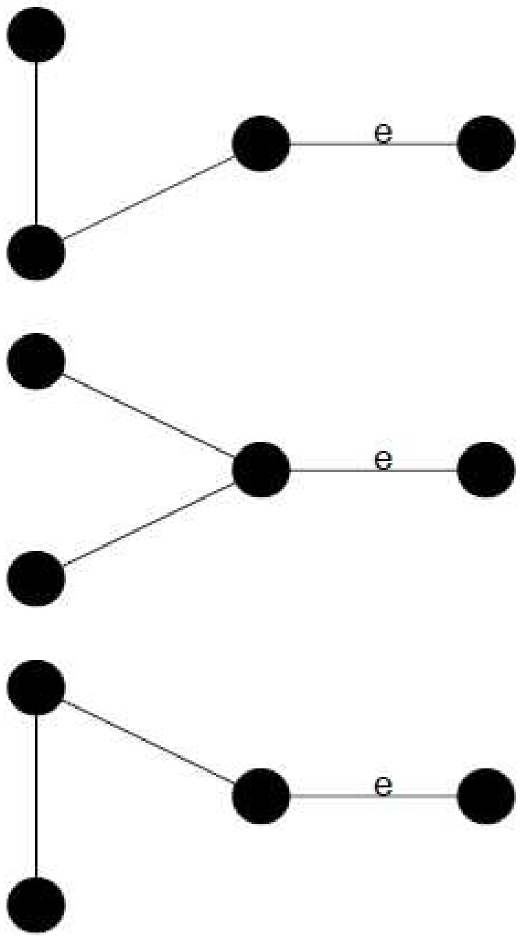
図のようなグラフ G を考える（次ページ左図）。このグラフ G に対する全域木は図のようになる（次ページ右図）。したがって，全ての全域木において，辺 e が含まれる。そこで，$C^* = \{e\}$ とすれば，どの全域木（林）にも C^* と共通な辺 e があり，C^* にはカットセット e が含まれる。

例題 7.2–解答 2-2

グラフG



全域木



演習問題6

T_1，T_2 は連結グラフ G の全域木であるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

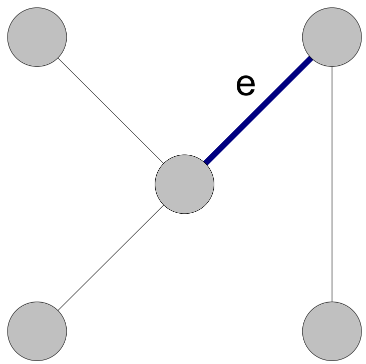
1. e が T_1 の任意の辺であるとき，T_1 の辺 e を除去し，辺 f を加えたグラフ $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ も全域木になるような，T_2 の辺 f が存在することを例を挙げて示せ。
2. 1. での操作を繰り返すことにより，T_1 は T_2 に「変換」できることを例をあげて示せ。ただし，T_1 の辺の一つを T_2 の辺で置き換える各段階において，全域木になっているものとする。

演習問題 6–解答

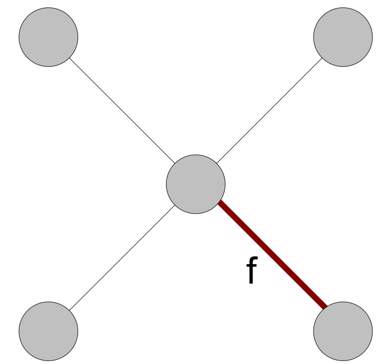
例題 7.2 で考えた図 99 のグラフ，及び，その全域木 A，B，C を，それぞれ T_1，T_2，T_3 として考える。

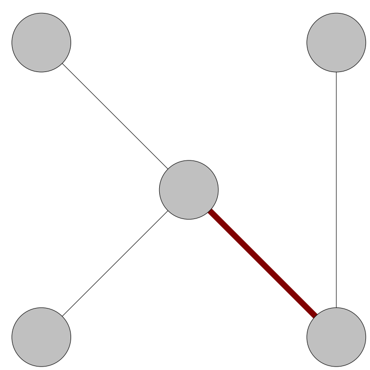
演習問題 6–解答 1

T_1



T_2





T_3

演習問題 6—解答 2