SAS 第5回
グラフ理論

担当:IPUSIRON

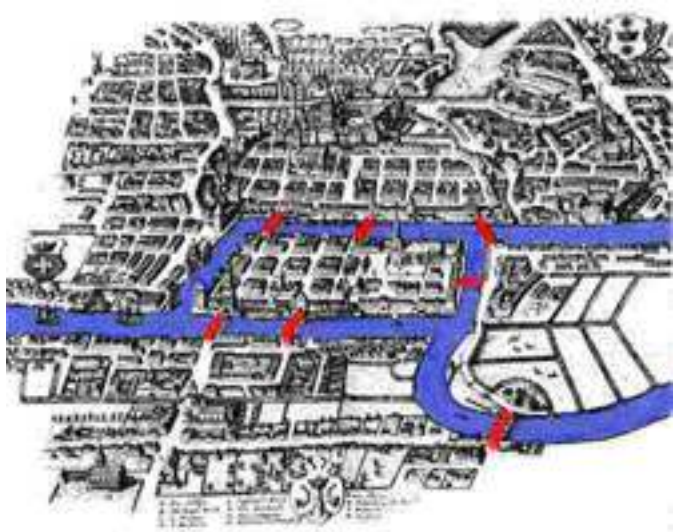
目次

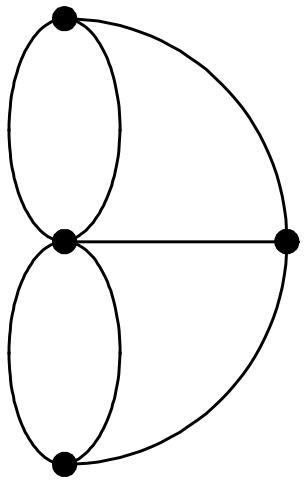
- オイラーグラフ
  - オイラーグラフ判定定理
  - Fleury（フラーリー）のアルゴリズム
- ハミルトングラフ
  - Ore（オーレ）の定理
- 番外：グラフ理論と暗号理論
  - P問題・NP問題
  - ゼロ知識証明、Blumプロトコル

オイラーグラフ

ケーニヒスベルクの橋渡りの問題

- グラフ理論の発端となる問題。
- かつての東プロシアの首都ケーニヒスベルグには右上図のように中の島B（クナイホック島）をはさんでブレーゲル川が流れていて、町をA,B,C,Dの4つの部分に分けていた。そして、これらを結ぶためにa～gの橋をかけられていた。
  - 画像はhttp://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Topology_in_mathematics.htmlから引用。
- あるとき、この町の市民が次のような疑問を示した。
  - **「同じ橋を2度渡ることなく、しかもこれらの橋を一度ずつ渡るように、町を散歩できるか」**
- この疑問は街に広がり、疑問が問題となり、そして賞金まで賭けられるようになった。
- 有名な数学者オイラーはこれは不可能であることを示した。
  - 右下図のグラフに置き換えて、一筆書きできるかどうかという問題に置き換えられる。
  - どのように解いたかについては後述する。



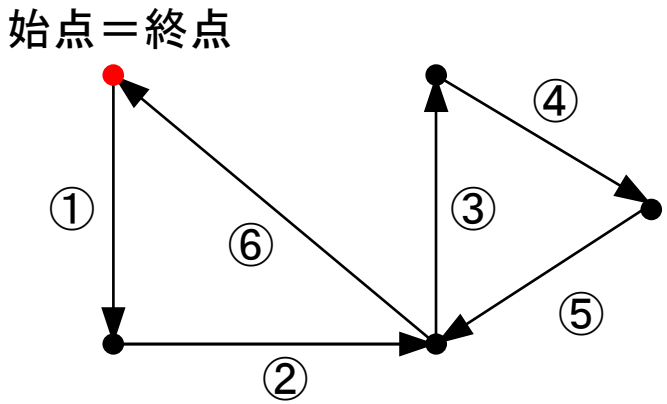


周遊可能グラフ

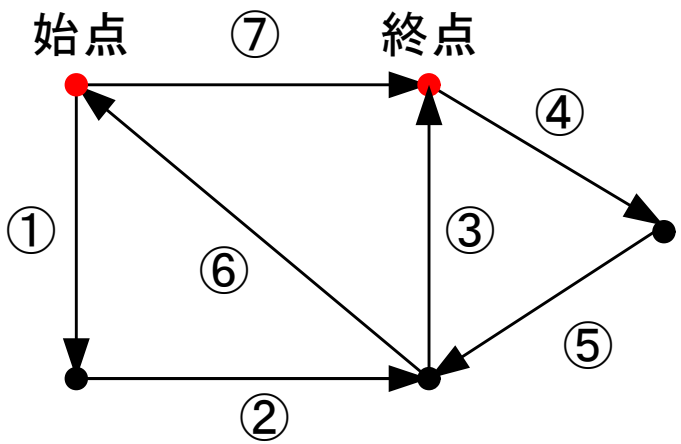
- 周遊可能グラフ
  - 周遊可能小道を持つ多重グラフ。
  - 直観的には、一筆書きができる多重グラフ。
- 周遊可能小道
  - すべての辺を1回だけ通る小道。
    - 小道＝道の一種。道のすべての辺が異なるとき。

オイラーグラフ

- オイラーグラフ
  - オイラー閉路から成り立つ連結多重グラフ。
  - すべての辺がオイラー閉路に含まれるということ。
- オイラー閉路
  - 閉じた周遊可能小道のこと。
  - 多重グラフGの各辺をちょうど一度だけ通る<u>閉じた</u>小道。
    - 閉じた(小)道＝道の始点と終点が一致している。閉路とも呼ぶ。
- 半オイラーグラフ
  - すべての辺を含む小道がある連結グラフ(閉じていない)。



オイラーグラフ



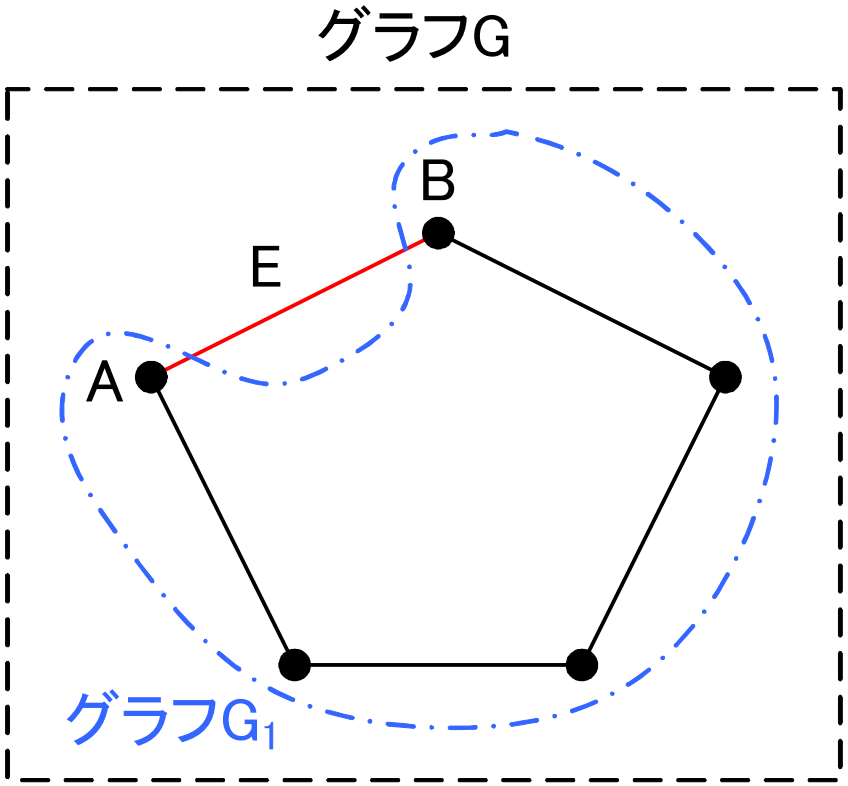
半オイラーグラフ

補題

- [補題]
  すべての点の次数が偶数である連結グラフは、任意の点を含む閉路が少なくともひとつ存在する。
- オイラーグラフ判定定理の必要条件の証明内で使う。

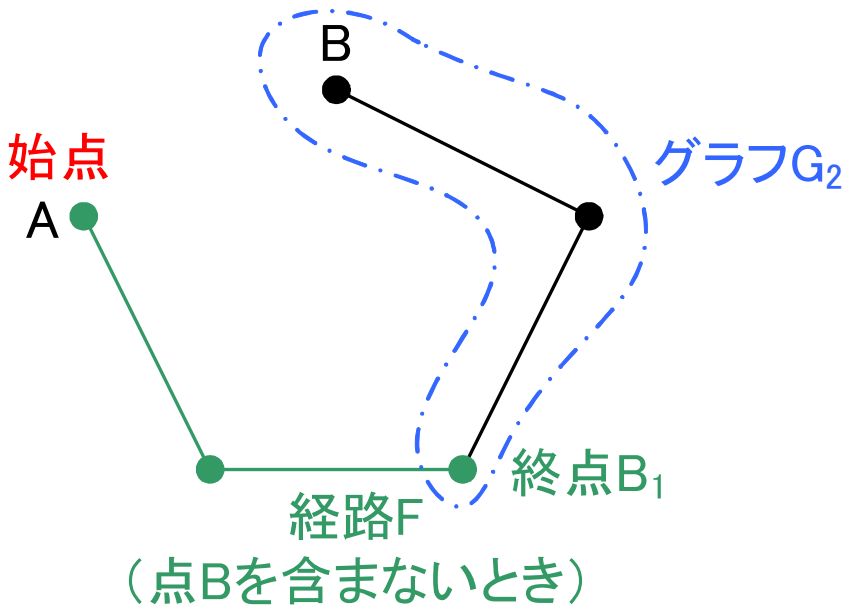
補題の証明(#1/2)

- すべての点の次数が偶数である連結グラフをGとする。
- Gの任意の点Aを端点とする任意の辺Eを選び、Eのもう片方の端点をBとする。
- Eを除いたグラフをG_1とする。
- G_1にAからBに至る経路Fが存在すれば、EとFとでGの閉路が構成できるようになる。
  - これはG_1が連結で、辺EがGの橋(ブリッジ)になっていないことを意味する。



補題の証明(#2/2)

- 次に、Fの存在を、Fを構成する手続きを示すことにより証明する。
- G_1ではA,Bの次数は奇数であり、0次以上なので、AとBに接続する辺がそれぞれ少なくともひとつある。
- G_1において、Aを始点として<u>任意の</u>経路を選ぶ。
  - [1]Fが点Bを含むとき、G_1にAからBに至る経路が存在する。
  - [2]Fが点Bを含まないとき、Fの終点B_1はBではない。
    - G_1からFを構成する辺を除き、またその結果孤立点があればそれも除く。その結果のグラフをG_2とする。
    - G_2ではB_1は次数が奇数となるから、B_1に接続する辺がひとつ以上ある。
    - よってFにB_1からの辺をさらに追加する。
    - これを繰り返すと、すべての辺が除かれるまでに必ずFの終点がBとなる。
- よってG_1でAからBに至る経路Fが必ず構成できる。（Q.E.D.）



オイラーグラフ判定定理

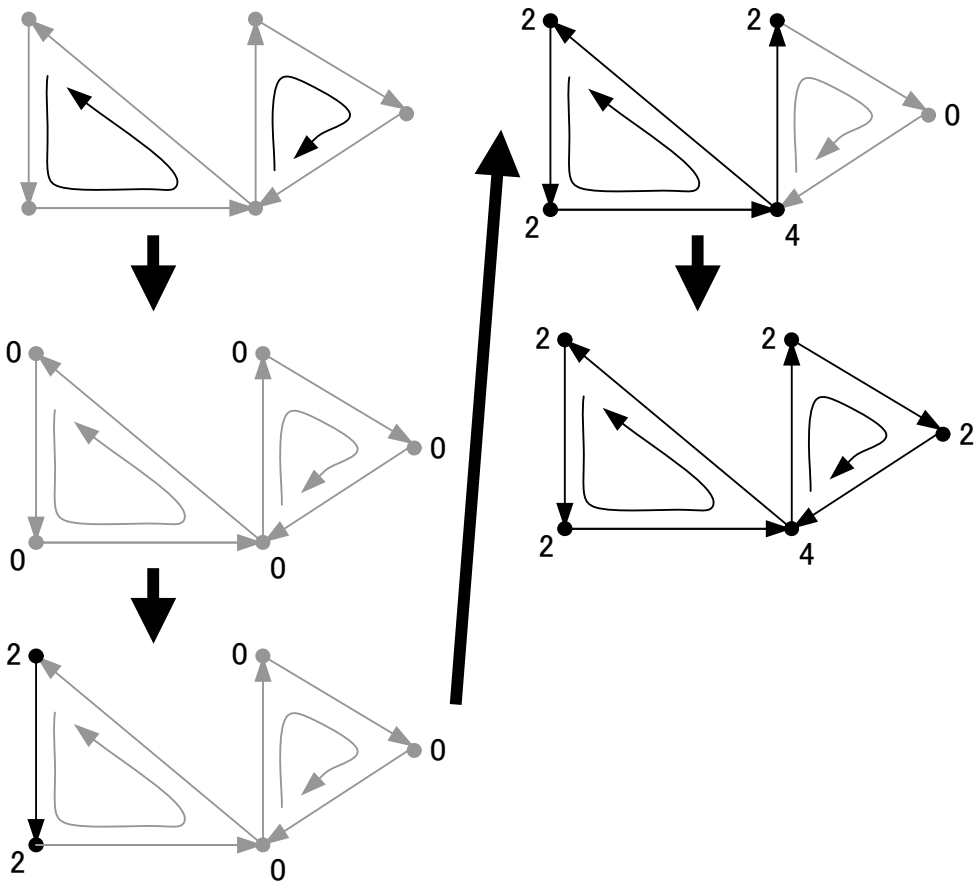
- [定理]（オイラーによって示された）
  「グラフGがオイラーグラフである」
  ⇔「Gは連結かつ、Gの点の次数がすべて偶数」
  - オイラーの定理とも呼ばれる。
  - 「⇔」は「同値」と呼ばれ、必要十分条件（必要かつ十分）を意味する。
  - 「A⇒Bが真」のとき
    - AはBであるための十分条件
    - BはAであるための必要条件

オイラーグラフ判定定理の十分性の証明(#1/2)

- [1]⇒（十分性）を示す。
- 証明方針：「Gがオイラーグラフである」と仮定して、「Gの各点の次数がすべて偶数」であることを示したい。
- Gはオイラーグラフなので、定義よりオイラー閉路は存在する（複数ありうる）。
  - **オイラー閉路**とは、一筆書きができる閉じた小道のことである。
  - オイラー閉路のひとつをLとする。
- Lはすべての点を含んでいるので、そのグラフは連結である。
  - これで連結性は示せた。
- 次にLに属するある点を考える。
- その点へ入るLの辺の数はその点から出るLの辺の数と等しい。つまり出入りがセットになる。
- Lはすべての辺を含んでいるので、その点に繋がる辺の数は偶数である。
- よって、オイラーグラフならば、連結グラフですべての点は偶数点である。

オイラーグラフ判定定理の十分性の証明(#2/2)

- （次数が偶数になることをもう少し具体的に見ると次のように考えることができる）
- 具体的なグラフで考える。
  - ここでは先ほどオイラーグラフであることを示したものを使う。
  - 2つのオイラー小道がある。
- まず左のオイラー小道に着目する。
  - 道順に移動して、点を通過するたびに点の脇に2を加えていく。ただし最初は0とする。
- この数値は点の次数に相当する。
  - すると、すべての辺はちょうど1回ずつ含まれる。
- 必ず各点の次数は2ずつしか増加しない。つまり偶数になる。

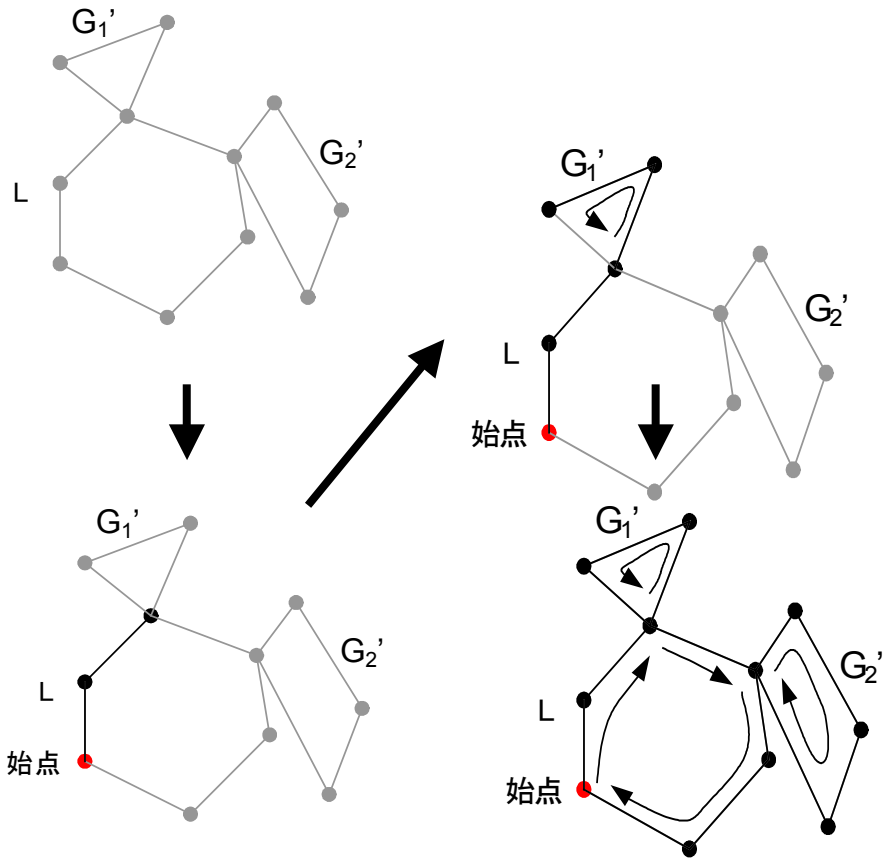


オイラーグラフ判定定理の必要性の証明(#1/2)

- [2]←(必要性)を示す。
- 証明方針:「連結Gの各点の次数がすべて偶数」と仮定して、「Gがオイラーグラフである」であることを示したい。
- [補題]より、Gには閉路Lが存在する。
  - [1]LがGのすべての辺を含んでいるとき(G⊂L のとき)
    - Lはオイラー閉路である。
  - [2]LがGのすべての辺を含んでいないとき(L⊂Gのときの場合)
    - GからLに属する辺を除去する。そして辺の除去によって孤立する点も除去する。除去の結果得られるグラフをG_1とする。

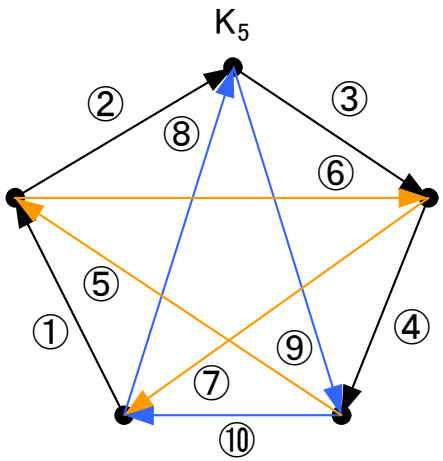
オイラーグラフ判定定理の必要性の証明(#2/2)

- 一般にはG_1はいくつかの連結グラフからなる。
  - G_1の連結グラフのひとつG_1'を考える。
  - Gは連結であるから、G_1'はLと少なくともひとつの点Aを共有する。
- L上の任意の点からスタートする。
- Lの辺を辿っていき、G_1'の孤立点でない点に出くわす度に、その点を含むG_1'のオイラー閉路を辿る。
  - 右の図でいうと2つのグラフを合わせてHであることに注意。
  - オイラー小道は偶数次数の点しか持たない(オイラー小道の性質)。ただし閉じているとは限らない。
- 仮定より、G_1'における点の次数は偶数になるから、G_1にはAを含む閉路L1が存在する。
  - LとL_1は点Aで繋がっており、全体としてひとつの閉路とできるから、それを新たにLとする。
  - これをG_1のすべての連結部分に対して行うと、Gでのひとつの閉路Lが得られる。
  - この手順をLがすべての辺を含むまで繰り返すことができる。
- 最終的に、始点に戻るのでまたLの辺を辿っていく。
- この操作を繰り返す。
- Lの始点に戻れば、結果としてオイラーグラフが得られる。
  - この手順は与えられたGからオイラーグラフを見つけ出す一種のアルゴリズムである。
- ゆえに、各点が偶数次数の連結グラフから、オイラーグラフをひとつ導けたので、示せた。(Q.E.D.)

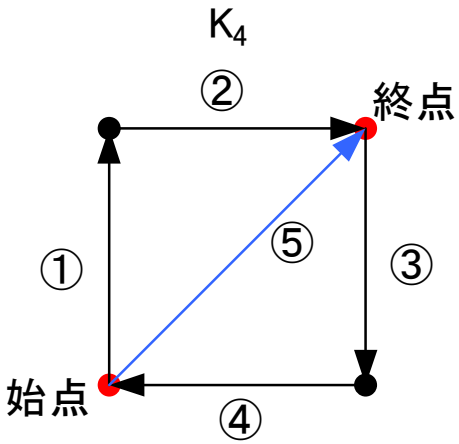


例題11(#1/3)

- (1)どんなnに対して完全グラフK_nはオイラーグラフになるか？
- K_nの任意の1点の次数はn-1である。
- [定理]6.2より、n-1=偶数でなければならない。
- 即ち、n=奇数であるようなK_nはオイラーグラフである。



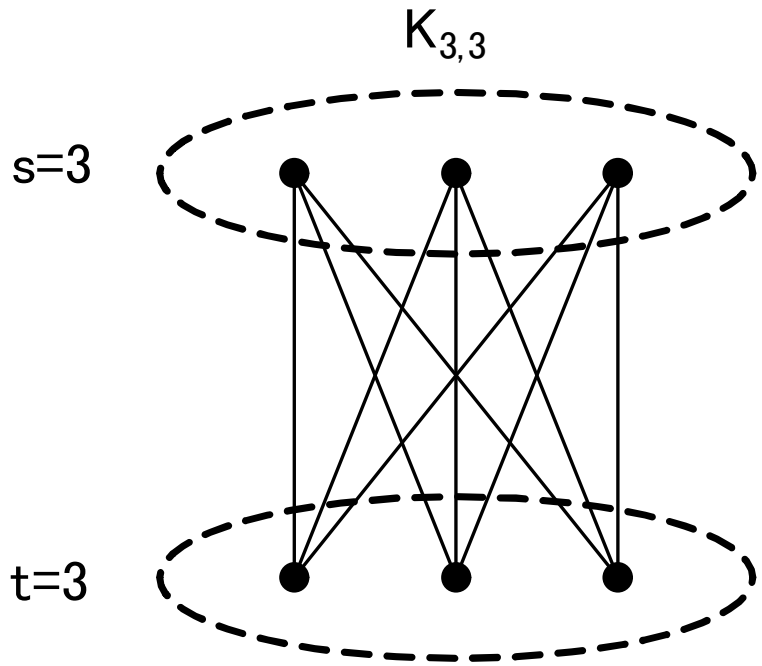
オイラーグラフ



オイラーグラフでない

例題11(#2/3)

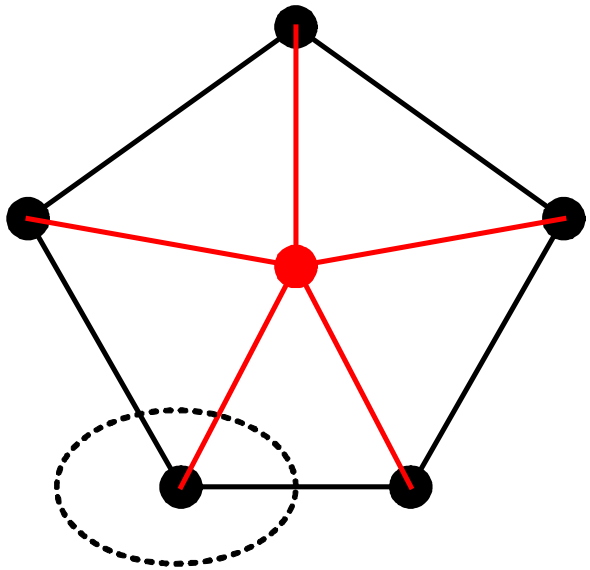
- (2)完全二部グラフ$K_{s,t}$のどのような場合がオイラーグラフとなるか？
- 1つ目の条件が「s：2以上」ということ。
  - s=1だと、下・上・下のときに同じ道を通ることになってしまい、オイラー小道にならない。
- 2つ目の条件が「t：偶数」ということ。
  - tが奇数だと、どうしても始点と終点が一致することがない。
    - 例えば$K_{3,3}$（右図）の場合、辺の総数は9個ある。「下→上→…→□」のとき、矢印が奇数（ここでは9回）登場するので、□に当てはまるのは上になる。
    - つまり始点と終端が一致しない。
  - 半オイラーグラフまでにしかならない。
- よって、$K_{s,t}$は「s≧2　∧　t：偶数」であるときにオイラーグラフになる。



例題11(#3/3)

- (3)どのようなnに対して車輪W_nはオイラーグラフになるか？
  - 車輪W_nとは、外側の閉路グラフC_{n-1}の各点と内側の1点を結ぶグラフである。
  - C_{n-1}の各点の次数は必ず3になる。
  - 3は奇数だから、[定理]6.2よりオイラーグラフにならない。
    - 1箇所でも次数が奇数になるところがあれば、オイラーグラフにならない。

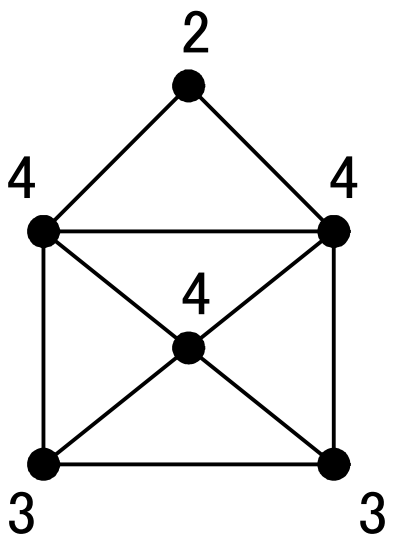
車輪W_6

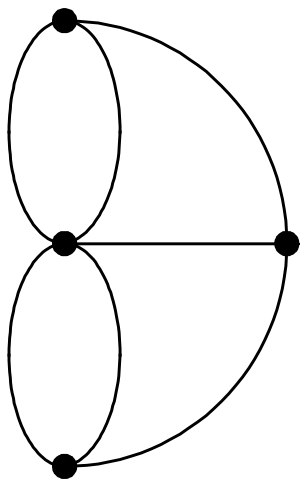


次数3

一筆書き

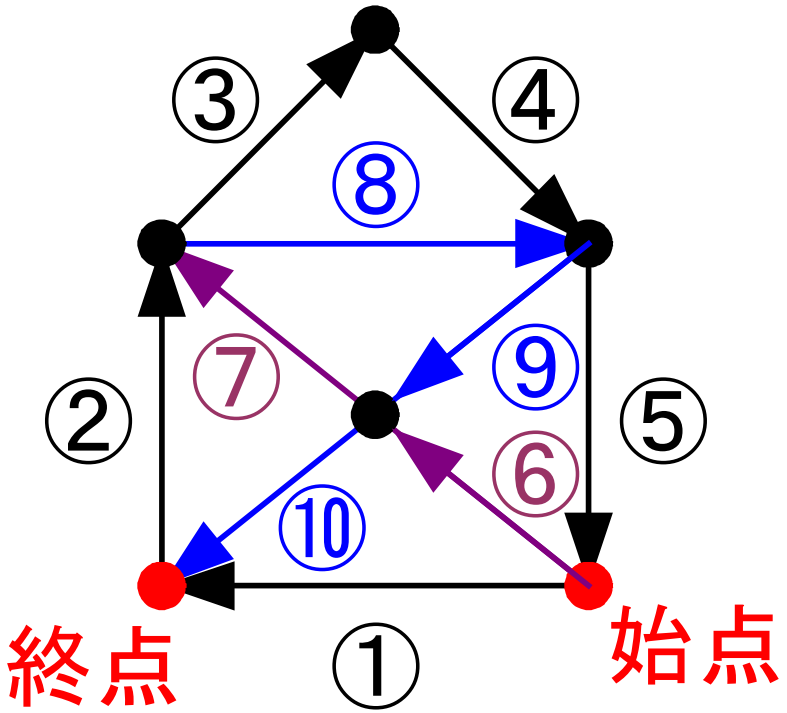
- [定義]
「連結なグラフGが一筆書きが可能である」とは、「Gがオイラー小道を持つこと」である。
  - つまりオイラーグラフであるか半オイラーグラフであるかということ。
  - グラフの連結性が大前提であることを注意。
- 一筆書きができるかどうかの判定定理として次がある（証明はしない）。
  - 「奇数次の点が、0個あるいは2個のときだけ一筆書きできる」
  - 右上図においては、奇数次の点は2個なので、一筆書きできる。
- ケーニヒスベルグの橋渡りの問題（右下図）は上記より、不可能。
  - なぜならば奇数次の点が4個あるから。





一筆書きアルゴリズム

- 一筆書きの経路を調べるアルゴリズムがある。
  - 奇数次の点があれば、奇数の点からスタートして、奇数の点で終わるようにする。
  - 右の図では次数3の点からスタートして、次数3の点で終わる。
  - 始点の候補は2つだけなので、総当りでも簡単に調べられる。



催し会場の順路問題

- [問題]7つの催し会場a,b,c,d,e,f,gの主催者がその順路を決める際に、一筆書きに基づく道順を採用しようとしている。
各会場から出ている道の本数は右の表の通り。
この場合、主催者の望む「一筆書き順路」は作成可能か？
  - 表から、すべての点の次数が偶数であることがわかる。後は[定理]6.2より、「**作成可能である**」ことがわかる。
  - 具体的なものを求めよという問題ではない。

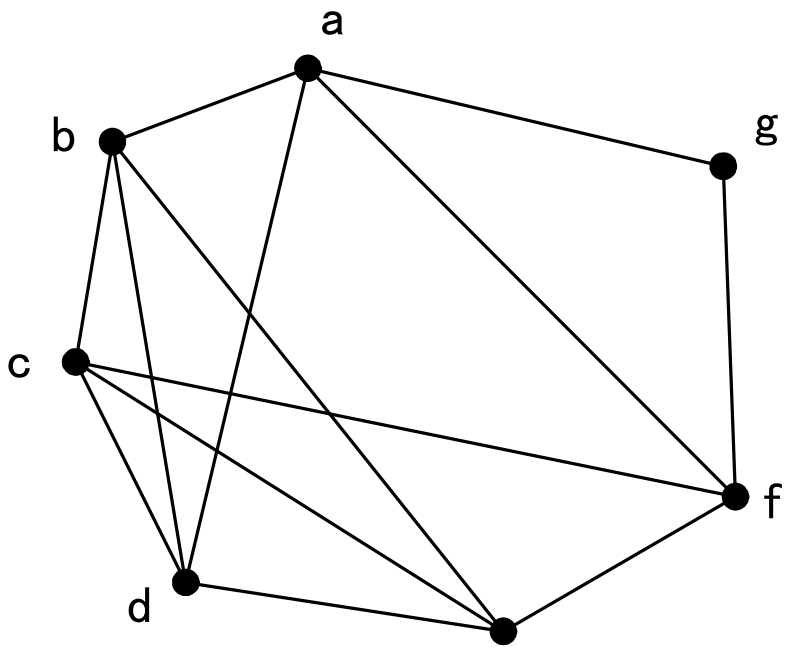
会場	道数
a	4
b	4
c	4
d	4
e	4
f	4
g	2

Fleury（フラーリー）のアルゴリズム

- 与えられたグラフの中からオイラー閉路を探すのは、グラフの点が多ければ多いほど難しくなっていく。
  - 一筆書きの経路を求めるより、オイラー閉路を探すほうが難しい。
  - この問題を解決するためのアルゴリズムがFleuryのアルゴリズムである。
- Fleuryのアルゴリズム
  - 任意の点から出発し、次の規則にしたがう限り自由に辺をたどればオイラー小道が得られる。
  - (1)たどった辺を除去し、孤立点が生じた場合にはそれも除去する。
  - (2)どの段階でも、他にたどる辺がない場合以外には橋をたどるな。
    - このアルゴリズムでオイラー小道をたくさん求めたら、その中から「すべての点を通過」かつ「始点と終点が一致」するものを抽出すればよい。

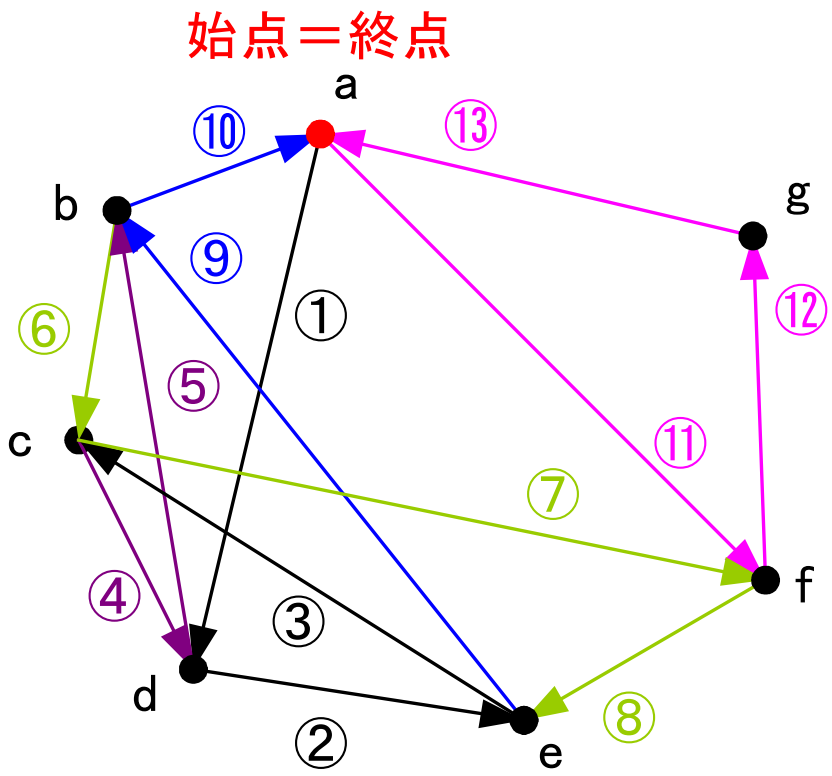
例題6.2.1

- (1)先に挙げた催し会場の順路問題において、各会場間の関係を表すグラフを描け。
  - グラフは右図のようになる。



例題6.2.1

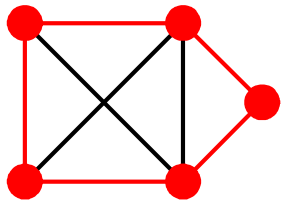
- (2)(1)で求めたオイラーグラフにおいて、Fleuryのアルゴリズムを用いることにより、オイラー小道を求めよ。
  - 試行錯誤して解くしかない。
  - 右図は答えの一例。
- 例題6.2.2は省略する。



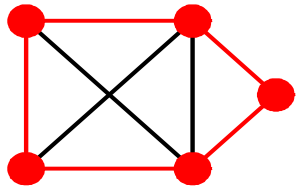
ハミルトングラフ

ハミルトングラフ

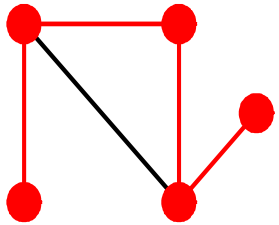
- ハミルトングラフ
  - ハミルトン閉路から成り立つグラフ。
  - すべての点がハミルトン閉路に含まれるということ。
- ハミルトン閉路
  - グラフGのすべての各点をちょうど一度だけ通る閉じた小道。
- 半ハミルトングラフ
  - すべての点を通る道があるグラフ(閉じていない)。



ハミルトングラフ



ハミルトン閉路



半ハミルトングラフ

巡回セールスマン問題

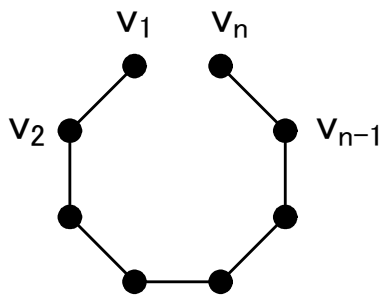
- 与えられたグラフがハミルトン閉路を持つかどうかを効率的に判定するアルゴリズムは存在しないと考えられている。
- セールスマンがn個の都市を順に1度だけ巡って出発した都市に戻る順路は、n個の点からなるグラフのハミルトン閉路である。
- 完全グラフにおける、そのような順路の最短路を求める問題のことを**巡回セールスマン問題（TSP：Traveling Salesman Problem）**という。
  - 現実世界での応用が色々ある。例えば、プリント基盤に穴を空けるときの最適の順序を求める問題も巡回セールスマン問題である。
  - 都市数がn個あるとすると、順路の総数は(n-1)!/2個ある。
    - つまり都市数が大きいときは、総当りで調べるのは無理。
  - 代表的な解法としては、ニューラルネットワークや遺伝的アルゴリズムを利用した方法やアニーリング法などがある。
    - 概要はhttp://www.geocities.co.jp/SiliconValley-SanJose/8766/tsp/index.htmlで解説されている。
  - しかし都市数が多いときに最適解を求めることは極めて困難であり、効率よく厳密な解を求める手法は未だに確立されていない。近似解を求める方法が一般的である。

Ore（オーレ）の定理

- [定理]7.1
  G：点がn（≧3)個ある単純グラフがあるとする。このとき次が成り立つ。
  「∃v,w（隣接しない任意の点） s.t. dev(v)+deg(w)≧n」…(55)
  ⇒「G：ハミルトングラフ」
- 直観的にいうと、「与えられたグラフの2つの点の次数の和が点の総数以上のときに、そのグラフはハミルトングラフである」ということである。
  - 条件(55)が成り立つグラフは必ずハミルトングラフである。
  - 一方、条件(55)が成り立たなくても、ハミルトングラフになるグラフもある。
- Oreの定理を満たす
  - →完全グラフのように十分な辺数がある
  - →よってハミルトングラフになりやすい
- Oreの定理を満たさないときに、そのグラフがハミルトングラフかどうかを判定するのは難しい。解き方はケースバイケース。その中でも試すべきアプローチは次の2つ。
  - グラフが2部グラフで表し、その点数が奇数⇒非ハミルトングラフ
  - 辺数に関して背理法で矛盾を導く。

証明(#1/3)

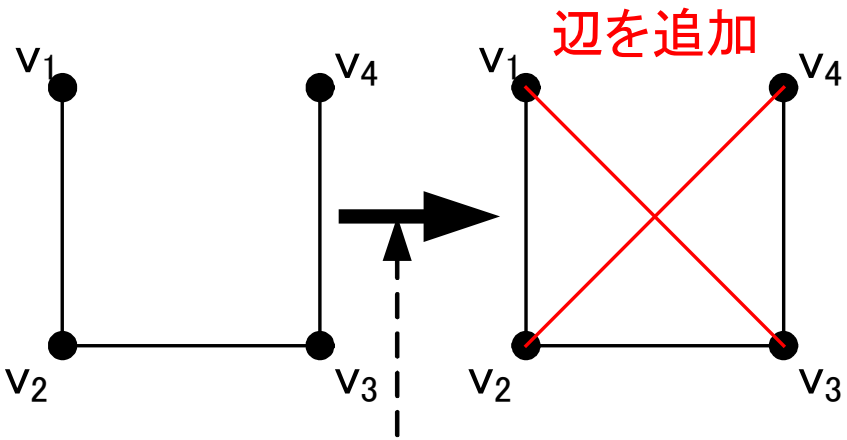
- 「グラフGが条件(55)を満たすならば、ハミルトングラフではない」と仮定して、矛盾を導く（背理法）。
- 「右図のようなすべての点を含む道」が存在するグラフGを考える。
  - この道に辺だけ追加したのがGとなる。
  - Gは「ぎりぎりハミルトングラフでない」という意味。



証明(#2/3)

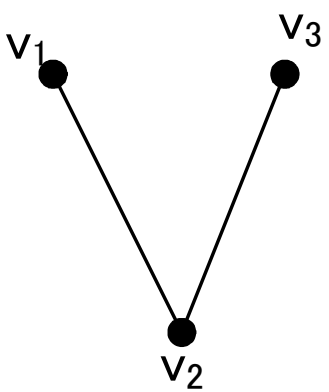
- v_1とv_nの2点に条件(55)を適用する。
  - $dev(v_1)+deg(v_n) \geqq n$を満たす$v_1$は<u>少なくとも</u>$v_3$～$v_{n-1}$のどれかと繋がっている必要がある。同時に$v_{n-1}$も$v_2$～$v_{n-2}$のどれかと繋がっている必要がある。
    - Gは単純グラフなので、多重辺を含まない。これを考慮して、v_1はv_2と繋がるはずはないし、v_nはv_{n-1}と繋がるはずはない。
  - n=4のときを考えてみるとわかる。n=4のときで$dev(v_1)+deg(v_3) \geqq 4$を満たすためには右上図のようになる必要がある。
    - よってn=5以上のときは辺がさらに増えるということになる。
  - n=3のときは、$dev(v_1)+deg(v_2) \geqq 3$を満たすためにどちらの点に辺を追加する必要がある(右下図)。
    - v1を自分に繋げばループができてしまい、単純グラフでなくなってしまう。
    - v1をv2と繋げば多重辺ができてしまい、単純グラフでなくなってしまう。
    - v1をv3と繋げばハミルトンサイクルになってしまう。

n=4のとき



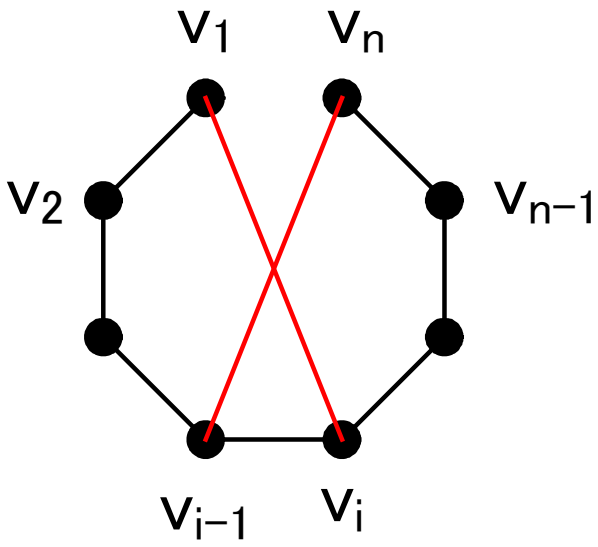
$dev(v_1)+dev(v_4) \geqq 4$にするため

n=3のとき

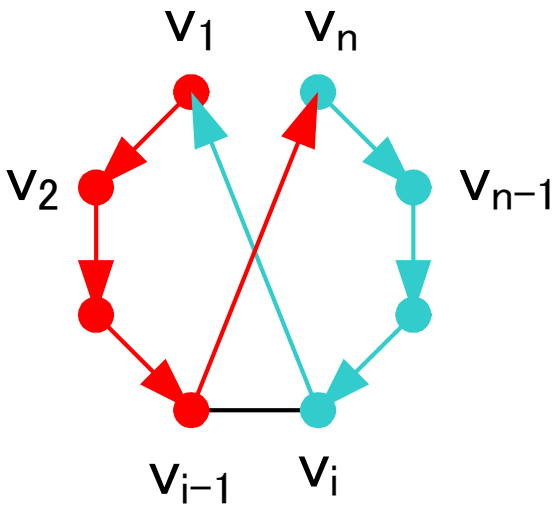


証明(#3/3)

- 条件(55)より、v_1はv_iと繋がり、v_nはv_{i-1}と繋がる（右上図）。
- するとグラフGにはハミルトン閉路が存在する（右下図）。
- Gはそもそもハミルトングラフではなかったので、矛盾が起こった。
- よって背理法から、主張が成り立つ。（Q.E.D.）



始点＝終点

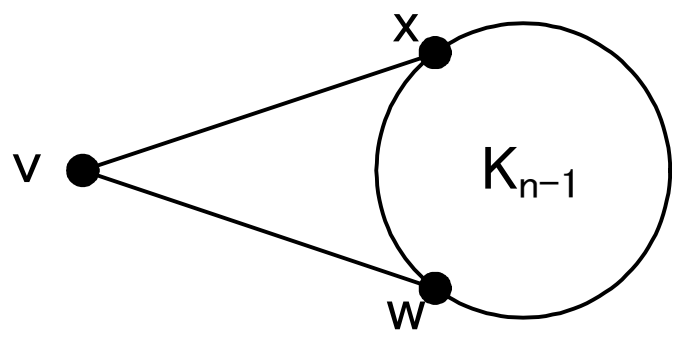


例題6.1

- グラフGにはn個の点があり、(n-1)(n-2)/2+2本の辺があるとする。
このとき、Oreの定理を用いて、このグラフGはハミルトングラフであることを示せ。
  - Oreの定理を用いるということから、Gが条件(55)を満たすことを示せばよい。そしたらGはハミルトングラフになる。
  - （ヒント）完全グラフK_nの辺の総数はn(n-1)/2であることをピンと来ると証明できる 。
  - （証明方針）K_{n-1}と1点を考える。

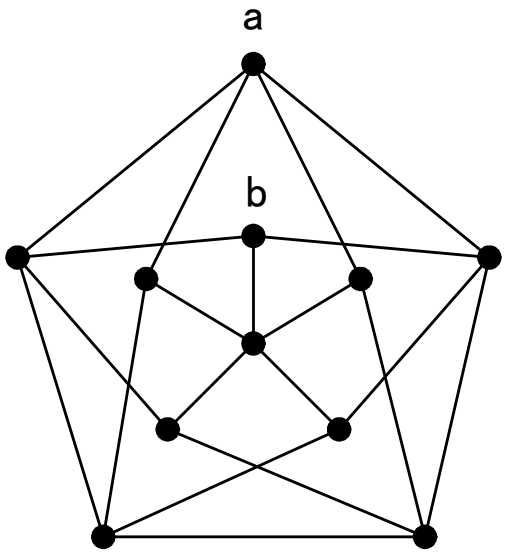
証明

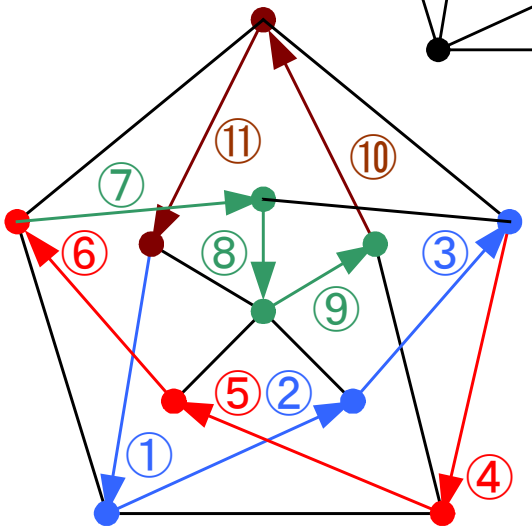
- 完全グラフK_{n-1}と1点vを考える。vとK_{n-1}は2つの辺で繋がるとする。
  - ただし多重辺はないことに注意。
  - 繋がっている2点をx,wとする。
- そのときの点の総数はn個、辺の総数は(n-1)(n-2)/2+2本になっていて、例題6.1のGを満たしている。そこでこのGで考えていく。
- 完全グラフはすべての点と隣接するので、隣接しない2点の選び方としては「K_{n-1}を構成する1点u（w,xを除く）とvの2点」である。
- この2点の次数を調べる。
  - deg(u)=n-2 （∵n-1個のうち自分を除いたすべてと隣接している）
  - deg(v)=2
- deg(u)+deg(v)=(n-2)+2=n
  - 条件(55)をぎりぎり満たしている。
- よって、Gはハミルトングラフである。（Q.E.D.）



例題6.2.3

- Groetzschグラフ（右上図）はハミルトングラフであることを示せ。
- 証明アプローチとして、Oreの定理を使うことを思いつく。
  - しかし、条件(55)は満たさない。
    - （左辺）=deg(a)+deg(b)=4+3=7
    - （右辺）=n=11
    - （左辺）＜（右辺）
- Oreの定理がうまくいかなかったので、手動で考えるしかない。
  - 右下図のようなハミルトン閉路を持つので、このグラフはハミルトングラフである。



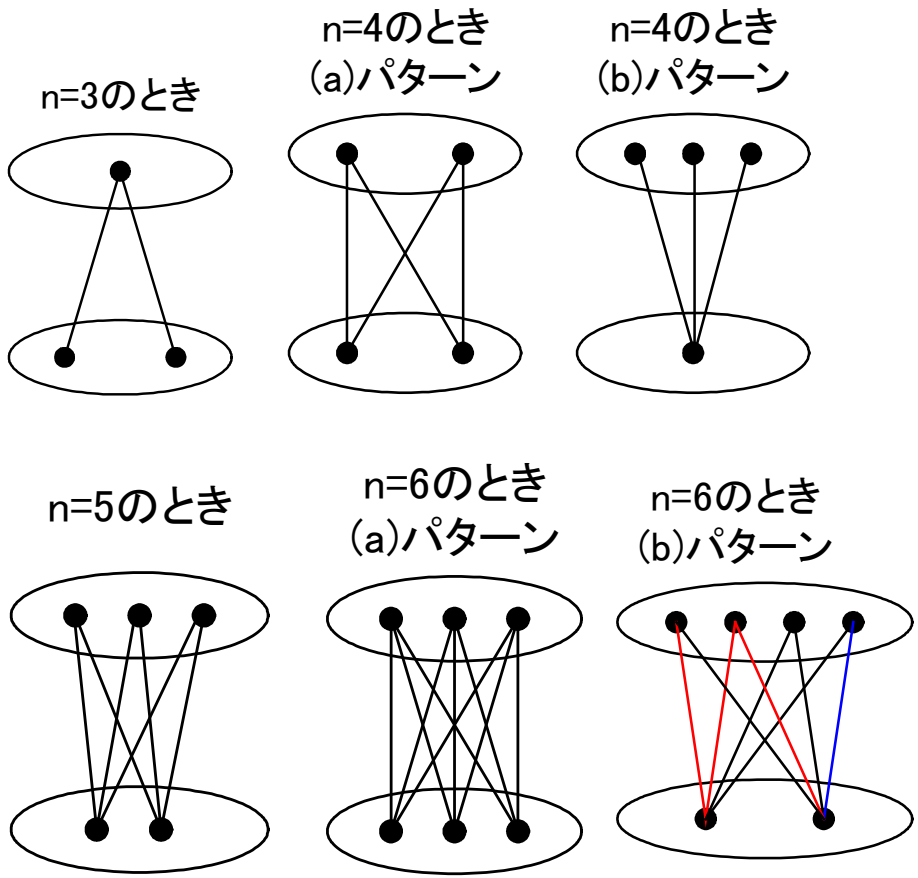


例題6.3.1

- 二部グラフGに奇数個の点がある場合、Gはハミルトングラフでないことを示せ。
  - この性質は、与えられたグラフGがハミルトンかどうかを判定するときに使える道具のひとつ。
- （証明方針）具体的な小さな数値で考察する。

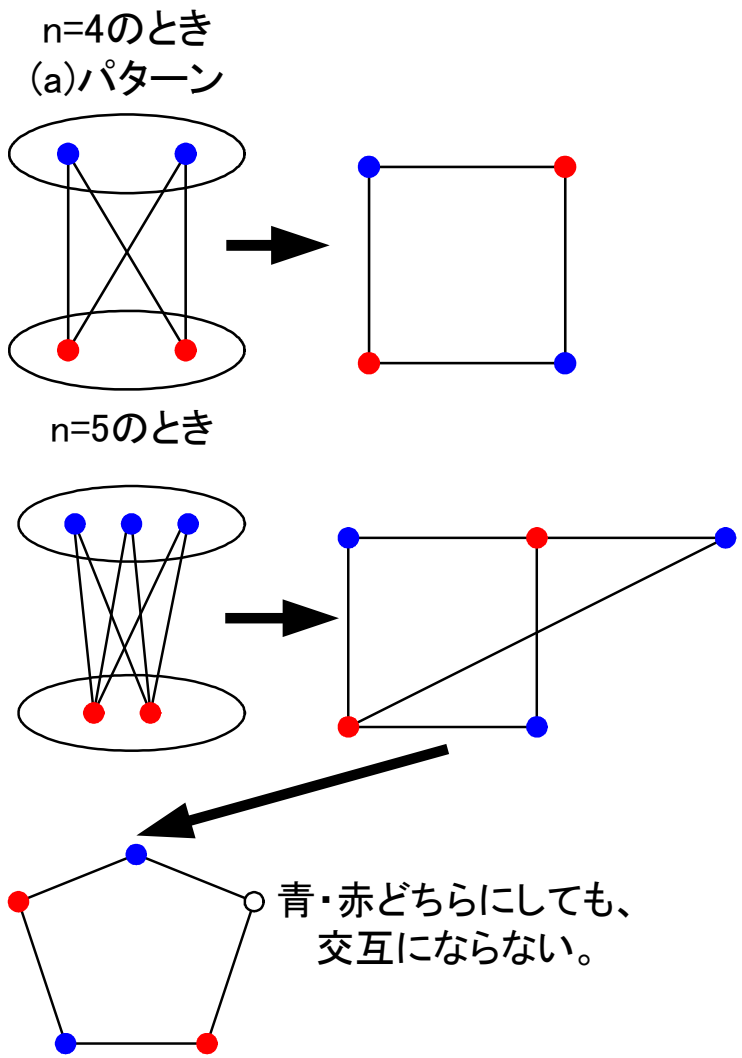
証明(#1/2)

- 問題は二部グラフだが、完全二部グラフでないと閉じようがない。
- n=3,4,5,6で考えてみる。
  - n=2のときは明らかに閉じない。
  - n=3のとき、閉じない。
  - n=4の(a)のとき、ハミルトン閉路を含む。
  - n=4の(b)のとき、閉じない。
  - n=5のとき、閉じない。
  - n=6の(a)のとき、ハミルトン閉路を含む。
  - n=6の(b)のとき、ハミルトン閉路を含まない。
- 考察から、次がわかる。
  - nが偶数のときは上下がそれぞれ同一数の点があれば、ハミルトングラフとなる。
  - nが奇数のときは閉じない。



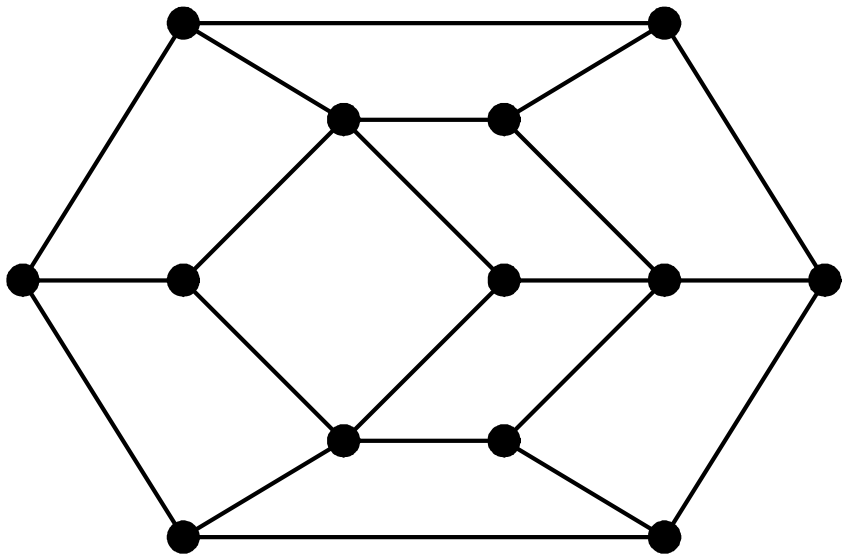
証明(#2/2)

- 二部グラフとは上下を行ったり来たりするグラフなので、グラフの点に赤or青を塗り分けると解釈することができる。
- さらにハミルトン閉路を持つということは、赤と青が交互に通る道が存在すると解釈できる。
- 言い換えると、閉路グラフの点に赤と青が交互に登場すれば、ハミルトン閉路を持つと解釈できる。
- n=奇数のときの閉路グラフは、点を赤・青を交互に塗り分けることは絶対に無理。
- よって、ハミルトングラフにならない。



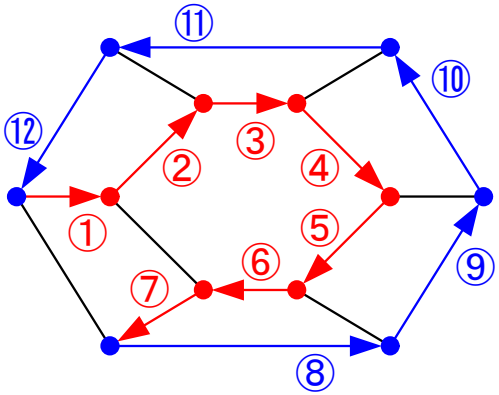
例題6.3.2

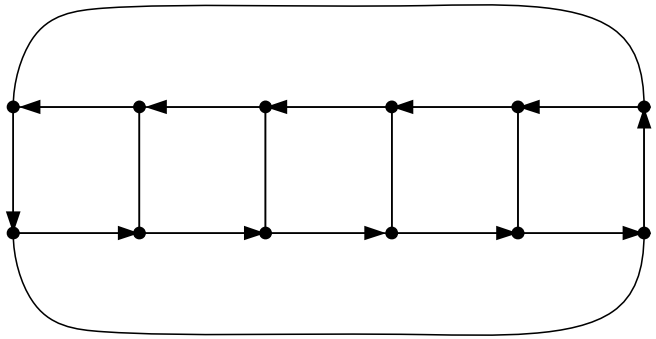
- 図86（右図）のグラフはハミルトングラフでないことを示せ。

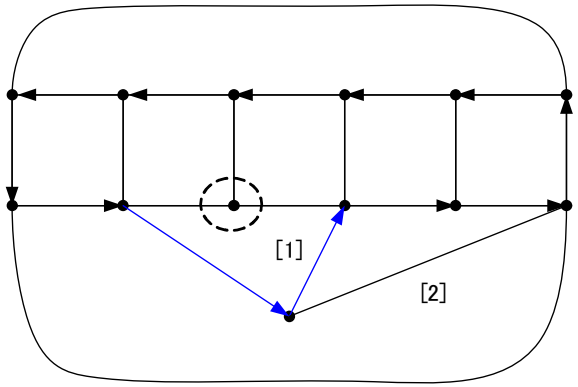


証明

- まず中央の点を除去したグラフ(右上図)を考える。
  - このグラフはハミルトン閉路が存在する。
- これと同形なグラフを考える(右中図)。
- 問題のグラフは右下図のようになる。
  - [1]のとき、1点残る。
  - [2]のとき、1点残る。
- ゆえにハミルトングラフにならない。

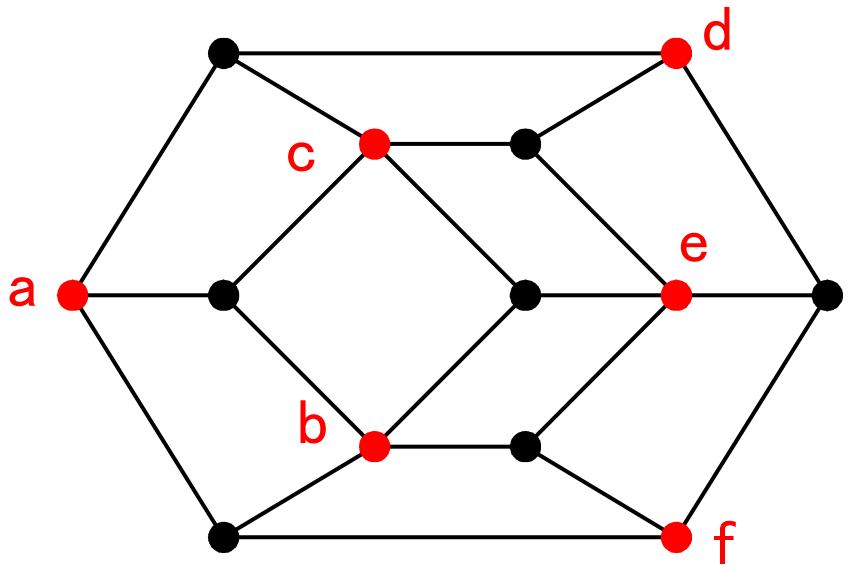






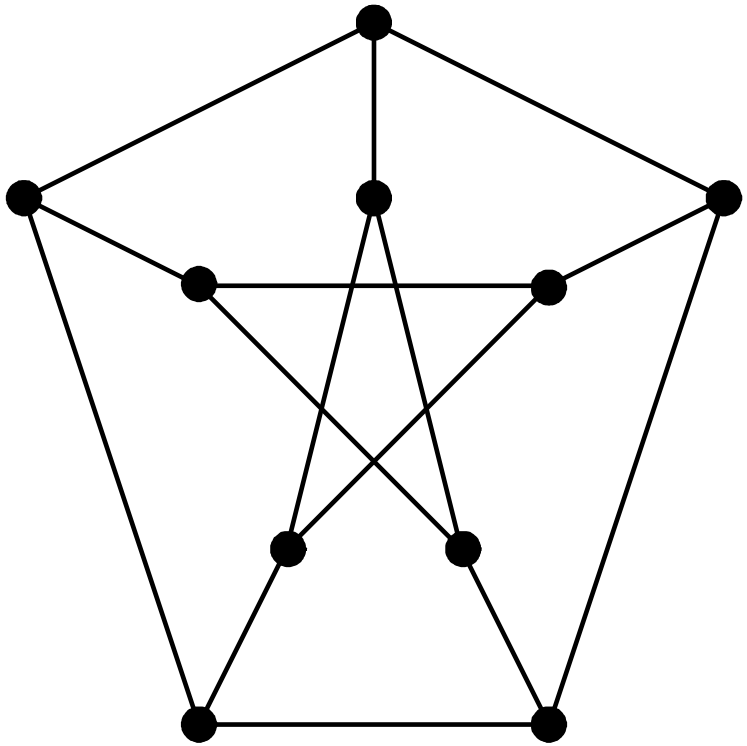
別証

- 与えられたグラフは点数が13、辺数が21である。
- このグラフにハミルトン閉路Cが存在すると仮定する。
- 互いに隣接していないa,b,c,d,e,fを考える。
- その閉路C上では各点に必ず2本の辺が接続していなければならないことに注目すると、
  C上にない辺数は少なくとも(3-2)+(4-2)+(4-2)+(3-2)+(4-2)+(3-2)=1+2+2+1+2+1=9本ある。
- よってCには高々21-9=12本しかない。
- しかし点数13でハミルトン閉路を作る場合にはその閉路Cの辺数は13となるので、辺数12ではこれは不可能ということになり、矛盾が生じた。（Q.E.D.）



補足

- ピータースングラフ（右図）はハミルトングラフではない。
  - 証明は例題9.4（講義資料#10）に書いてある。

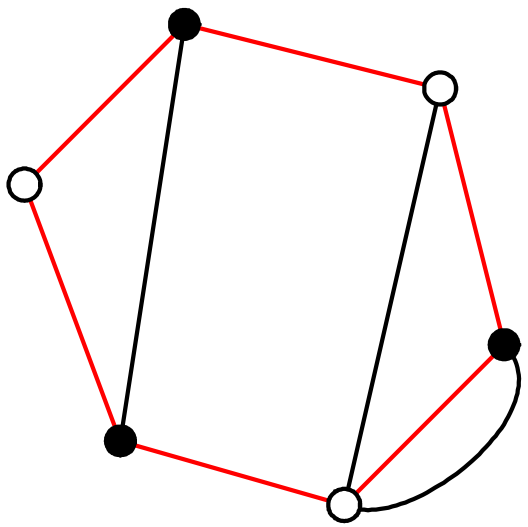


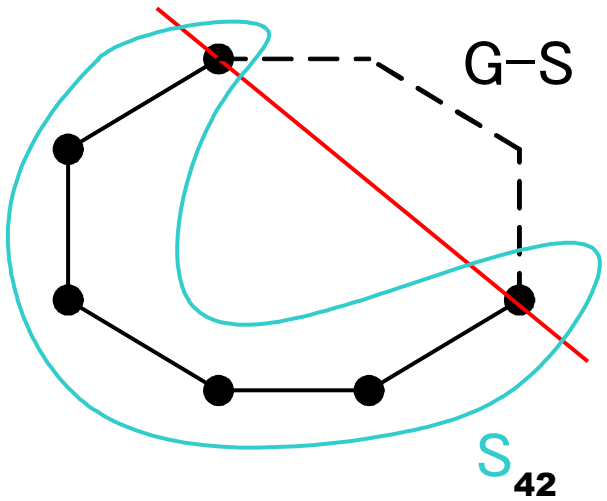
演習問題5

- Gはハミルトングラフとし、SはGのk個の点からなる任意の集合とする。
このとき、グラフG-S（GからSの点とそれらに接続している辺をすべて除去して得られるグラフ）の成分はk個以下であることを具体的なハミルトングラフに対して、ひとつ例示せよ。

解答(#1/3)

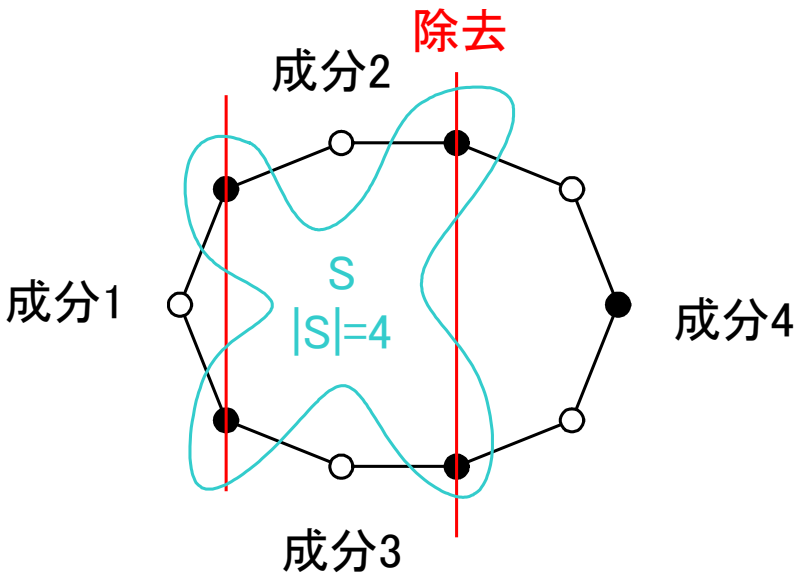
- ハミルトングラフはハミルトン閉路Cを含む。
- その閉路Cは●○を互い違いに並べてできる輪であるから、完全二部グラフ$K_{s,s}$で表すことができる（sは2以上の整数）。
- ここで右上図のようなグラフGを考える（赤線がハミルトン閉路Cになっている）。
- Gの中から任意のk個の点を取り出して構成される集合SをGから引いてできるグラフの成分数が知りたい。
- [1]k個の点がすべて隣接する場合
  - 明らかにG-Sの成分数は1になる（右下図）。
  - これがG-Sの成分数の最小値を与えている。





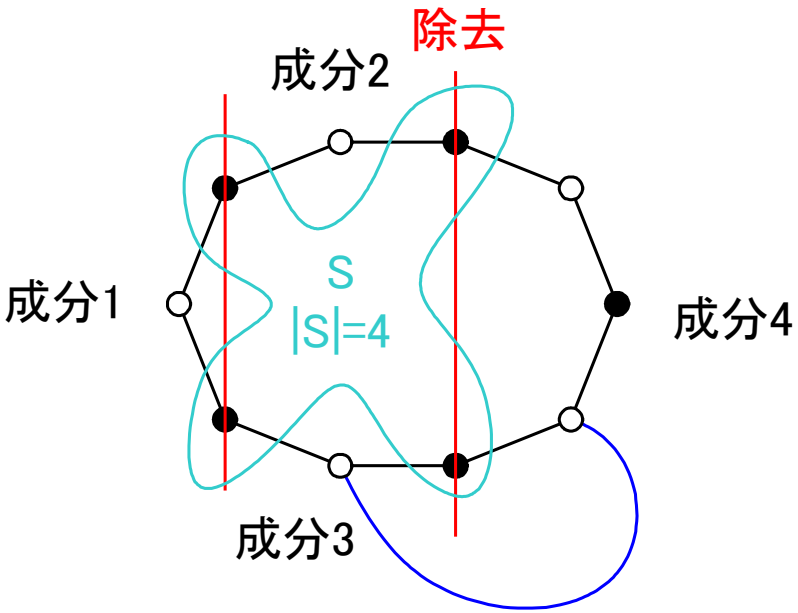
解答(#2/3)

- しかし、ここで問題とするのはG-Sの成分の最大値である。
  - この最大値を与えるような集合Sの選び方は明らかに「Sを構成するk個の点がすべて隣接しない場合」である。
- [2]Sを構成するk個の点がすべて隣接しない場合
  - このため、閉路C上のk個の点を2つずつペアにして（このペアの総数はl=k/2個）、C上にこのペアがひとつできるごとにG-Sの成分がどう変化するかを調べる。
  - 右図を参考にして考察する。
    - 青のところがSになる。
    - 線を引いたところが除去を意味すると考えるとよい。
  - ペア数が1の場合には成分数が2、ペア数が2の場合には成分数が4、…と増えていく。
    - 結局ペア数がlの場合には成分数は2lとなる。
  - この2lはSの点の総数kと一致するから、次が成り立ち、題意を満たす。
  - （G-Sの成分数）≦k



解答(#3/3)

- ところで先ほどの議論ではGの中の閉路Cに関して考えて、この閉路を構成する辺以外の接続辺を考えていなかった。
- そこで右図のような接続辺を加わったと考えてみる。
  - 図では3番目の成分と4番目の成分が連結される。
- つまり、G-Sの成分数は減ることはあっても、増えることはありえない。
- ゆえに題意は満たされる。(Q.E.D.)



（番外編）
グラフ理論と暗号理論

クラスPとNP

- クラスPやNPとは計算の難しさのこと
- クラスP
  - 効率的に解ける問題の集合
  - クラスPに属する問題がP問題
- クラスNP
  - 解の候補が正しいか否かを効率的に判定できる問題の集合
  - クラスNPに属する問題がNP問題
- P⊂NPは明らか
- 直観的にP≠NPだが、証明されていない
  - 証明されたら大発見
- NP-P問題（クラスNPからクラスPを除いたときの問題）は一般的に難問。
  - 暗号ではNP-P問題が使われる。
  - つまりNP≠Pという仮定のもとで成立する。

ゼロ知識証明

- 知識証明
  - 証明者（prover）と検証者（verifier）が情報をやり取りして、最終的に検証者を納得（accept）させる暗号プロトコル。
  - 知識とは部分情報などではなく、計算能力の増加をもたらすもの。
- ゼロ知識証明
  - 情報をやり取りしても、相手に能力の増加をさせないで、相手を納得させる暗号プロトコル。
    - 証拠の知識を渡さずに主張を証明するための暗号プロトコル。
  - 次に示すようなNP問題が利用される。
    - ① グラフのハミルトン閉路を求める問題
    - ② グラフの3色問題
    - ③ グラフ同型判定問題
  - こうしたNP問題を利用して、ゼロ知識証明を作ることができる。
    - 例：Blumプロトコル