SAS 2006 第4回目

グラフ理論　道と閉路

presents by nesys

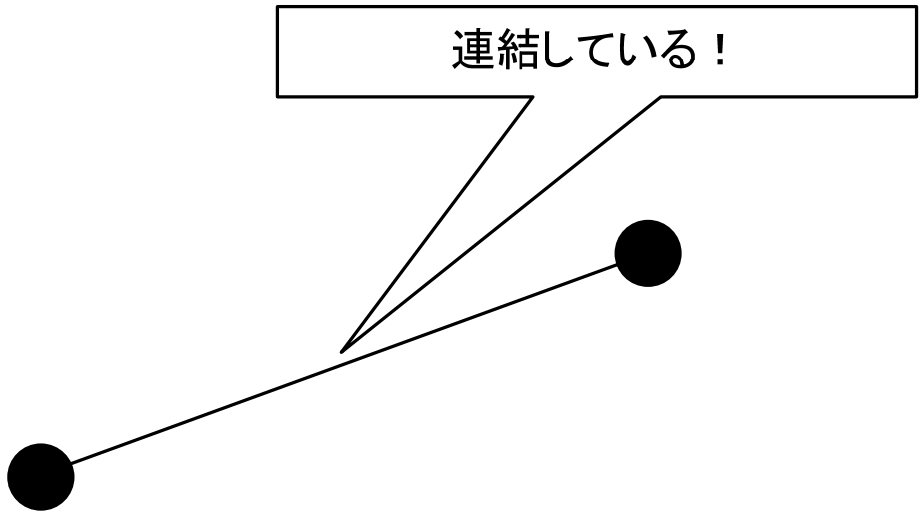
目的

- 今まで
  - 様々な概念のグラフを挙げることにより、グラフ理論の全体像を見てきた。
- これから
  - グラフ理論の重要な概念の1つ、「道」及び「道路」についてより詳しく理解していく。

連結性

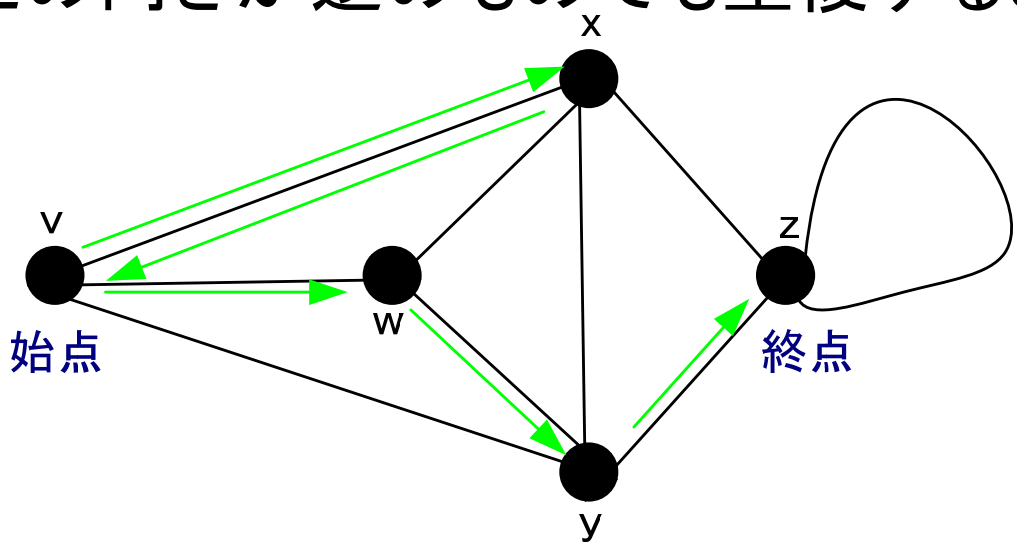
概念の定義 “連結”

- グラフの各2点の間に道（path）がある。



概念の定義 “歩道”

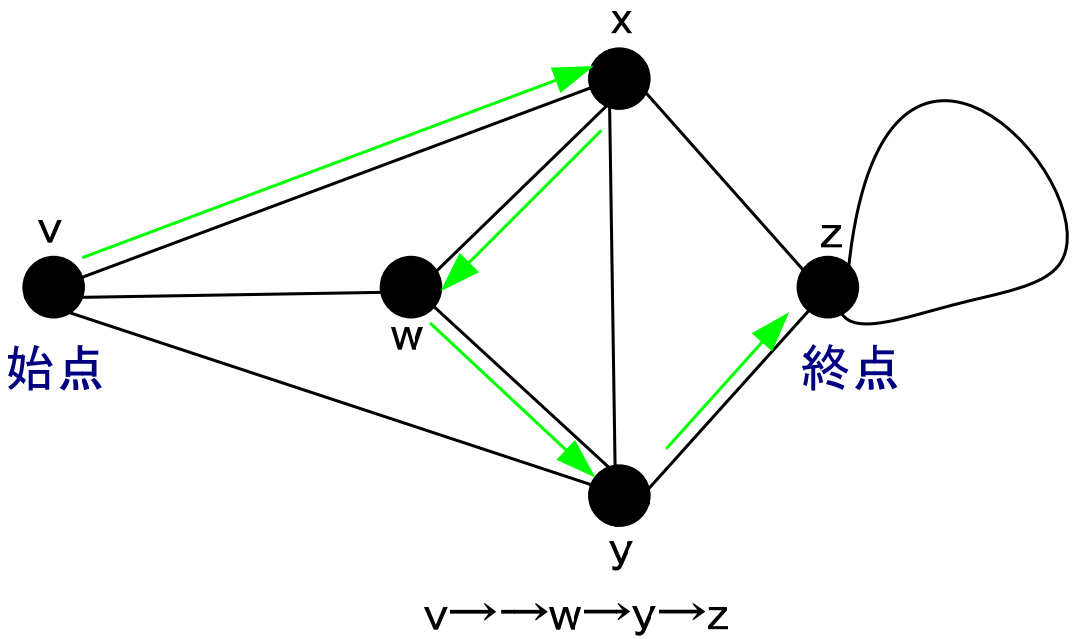
- $v_i(i=0,\cdots m)\in G$(グラフGに属する点0～m)に対し、辺列$v_0v_1, v_1v_2\cdots, v_{m-1}v_m$ を**歩道(walk)**という。
- v_0は始点、v_mは終点のことを指し、この辺列に重複する辺があってもよい。
- 疑問:辺の向きが逆のものでも重複すると言えるのか？



v→x→v→w→y→z

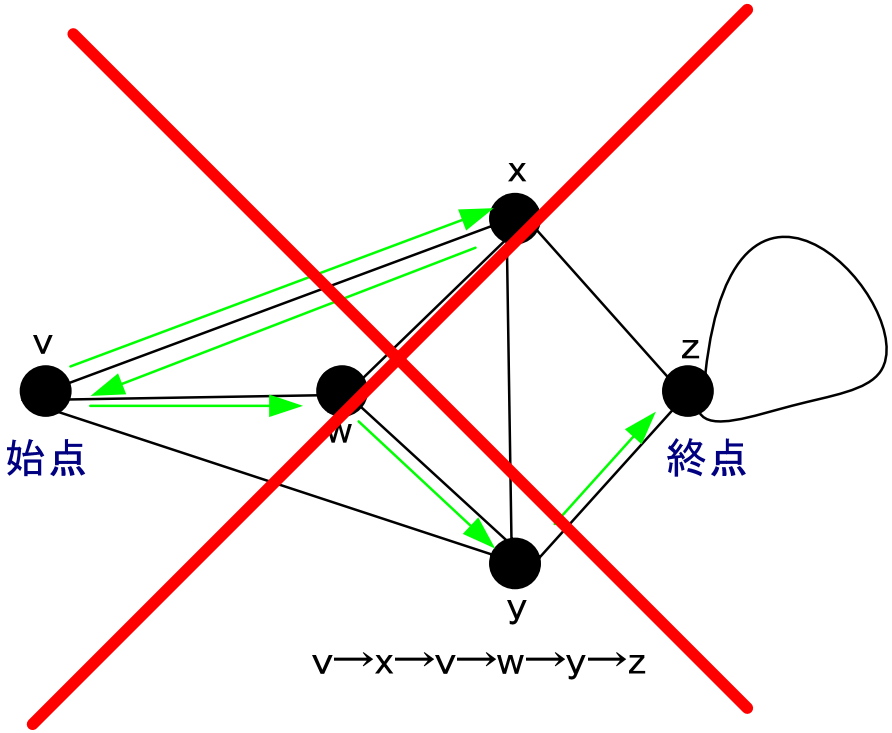
概念の定義 “小道”

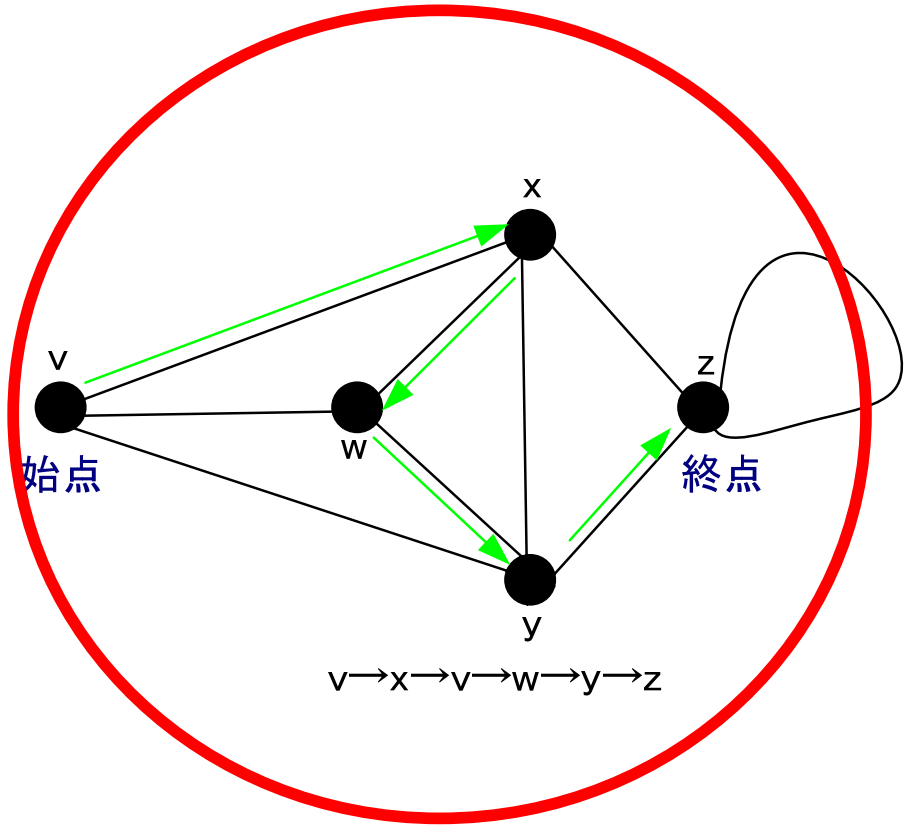
- 全ての辺 $v_0v_1, v_1v_2 \cdots, v_{m-1}v_m$ が異なる歩道。
- 疑問：辺の向きが逆のものは異なると言えるのか？



概念の定義 “道”

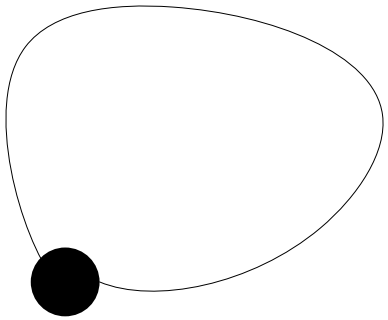
- 点$v_0, v_1 \cdots, v_m$が全て異なる歩道。



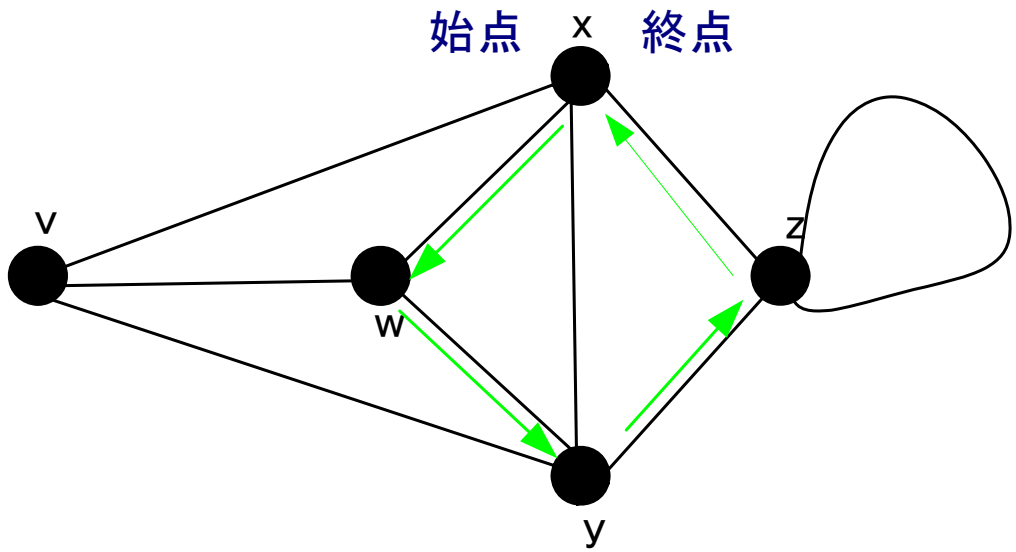


概念の定義 “閉路”

- 少なくとも1本辺を持つ始点と終点が同じ($v_0 = v_m$)閉じた道。



ループしている閉路



x→w→y→z→x

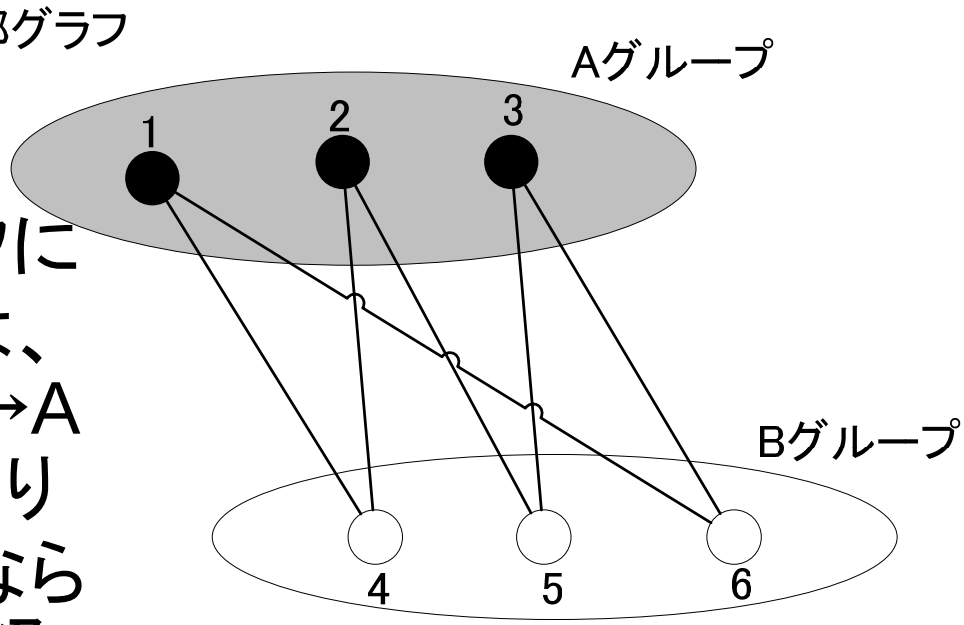
連結性　概念のまとめ

- 隣接している点同士をたどった辺列→**歩道**
- *歩道*の辺は重複してはならない→**小道**
- *小道*の点は重複してはならない→**道**
- *道*の始点と終点が重複している→**閉路**
- *道*がある→**連結**している！

定理5.1

グラフGが2 部グラフであるとき、閉路は全て偶数長である。

- 1→4→2→5→3→6→1
- 以上のように、2部グラフにおいて閉路ができるには、少なくともA→B→・・・B→Aのように、A→B→Aの繰り返しが行われなければならなく、2×繰り返した数、経路をたどることとなるので、この定理は正しい。



定理5.2

グラフGはn個の点を持つ単純グラフであるとする。Gにはk個の成分があるとき、Gの辺の本数mは次式を満たす。

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

補足：

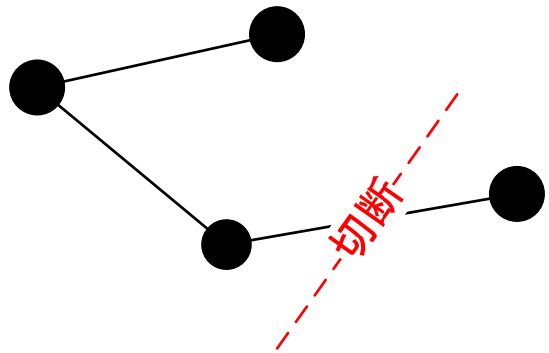
- **単純グラフ**とは、重複やループが含まれず、全ての点が連結しているグラフ
- **成分**とは、非連結グラフを構成する各連結グラフのこと

定理5.2　証明-1

- 下界（かかい）（ある部分集合の任意の要素より大きくない要素）$n-k \leq m$ の意味は、点の数－成分数は辺の数より少ない。
- 数学的帰納法を用いる。
  - 命題P(n)に対して、P(0)が真であり、任意の自然数kに対してP(k)が真だと過程して、P(k+1)が真であれば、任意の自然数nについてP(n)は真と言える。
- $n-k \leq m$ を命題Pと置く。
- m=0のとき、n=kとなり、k-k<=m　0<=0としてPは成り立つ。

定理5.2　証明-2

- 単純グラフGから辺を1本切断したとき、命題が成り立つと仮定する。
- 切断することによる変化
  - 成分数: k　→　k+1
  - 点数:　n　→　n
  - 辺数:　m　→　m-1



- 上記のそれぞれの量に関して不等式を作って計算すると…　$n-(k+1) \le m-1$

$$n-k \le m$$

- 帰納法により、全てのmに対して命題Pは成立する。

定理5.2 証明-3

- 上界（ある部分集合の任意の要素より小さくない要素）を示す不等式： $m \le (n-k)(n-k+1)/2$
- 辺の数の上界を考えるわけだから、グラフGの各成分は辺の数の一番多い完全グラフとして考えて良い。
- 点の数nがあるとき、その完全グラフとしての辺の総数は $\frac{1}{2}n(n-1)$ で表される。

定理5.2 証明-4

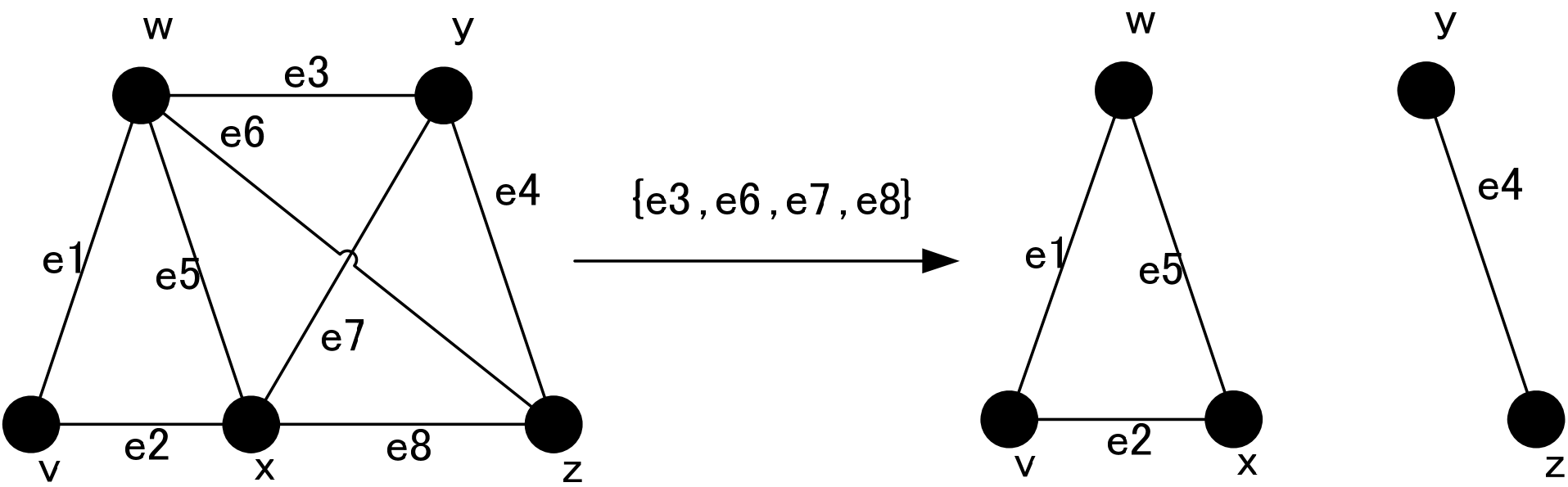
- k個の完全グラフがあるとき、どれか1つのグラフに他のグラフから点をどんどん移していくと、いずれ、でかい完全グラフ1つとk-1個の点が1つしかない孤立点（空グラフ）からなるグラフができる。
- 成分数kのグラフで最も辺数が多い完全グラフGは点の数が、点数n-(空グラフの数k-完全グラフ自身1)=n-k+1となり、この上界では辺数の最上限を表しているので、先ほどの完全グラフにおける辺数を求める式に代入することによって証明することができる。

$$\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+1-1)=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

非連結化集合と分離集合

概念の定義 “非連結化集合”

- それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合。

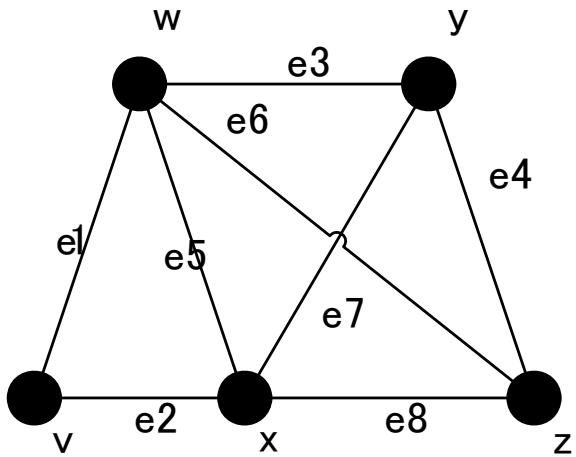


概念の定義 “カットセット”

- その非連結化集合、全体をもってでしか非連結化集合にならない非連結化集合。
- (カットセット)⊆(非連結化集合)

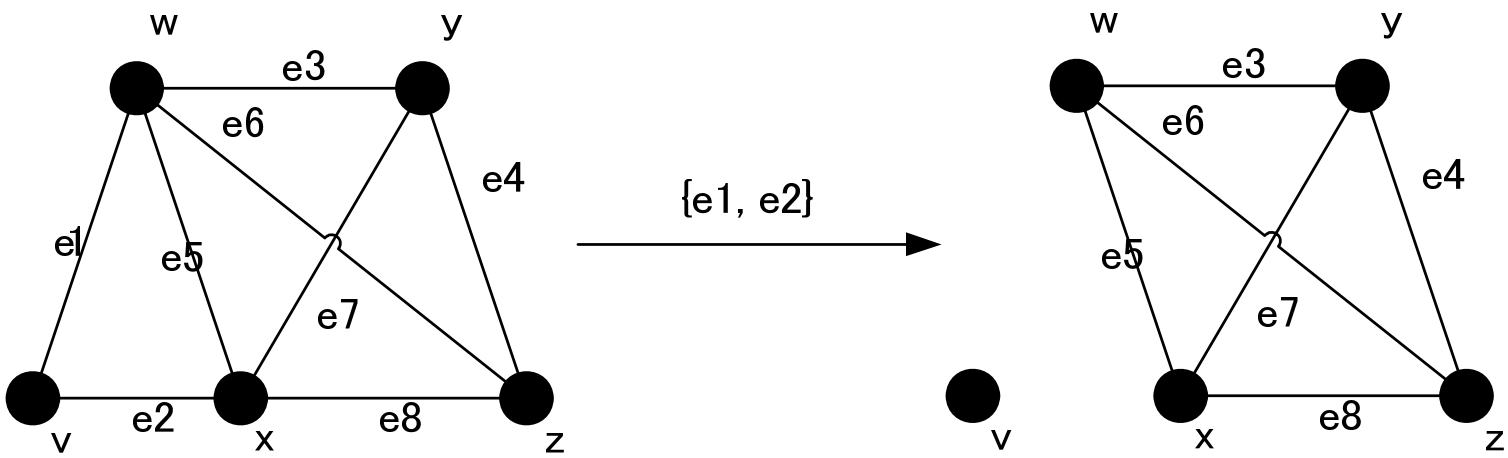
  （カットセットは常に非連結化集合でもある）
- 以下の図において、{e3,e6,e7,e8}はカットセットである。

  なぜなら、
  {e3},{e6},{e7},{e8},{e3,e6},{e3,e7},{e3e8},{e6,e7},{e6,e8},{e7,e8},{e3,e6,e7},{e3,e6,e8},{e3,e7,e8}のいずれにおいても非連結化集合ではなく、全体としての{e3,e6,e7,e8}をもってしか非連結化集合が成り立たないため。



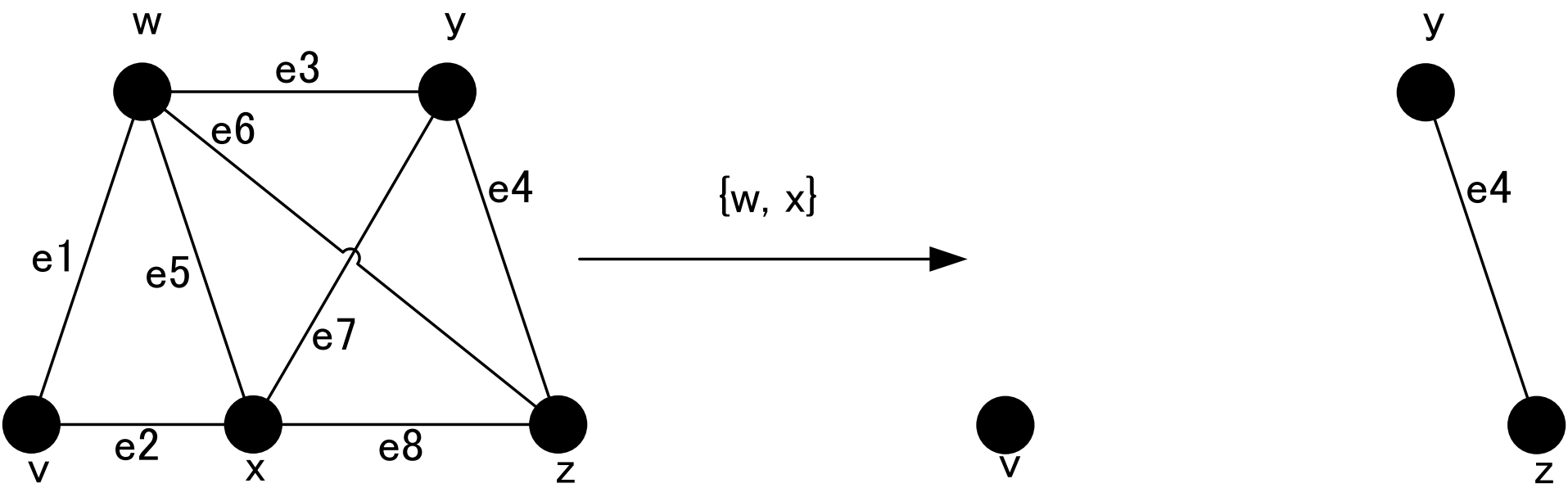
概念の定義 “辺連結度（edge-connectivity）”

- 連結グラフGの最小なカットセットの大きさ。
- 式:$\lambda(G)$
- $\lambda(G) \geq k$ のとき、グラフGは**k-辺連結**であるという。
- 以下のグラフGの最小のカットセットは{e1,e2}なので、$\lambda(G) = 2$ となり、2-辺連結である。



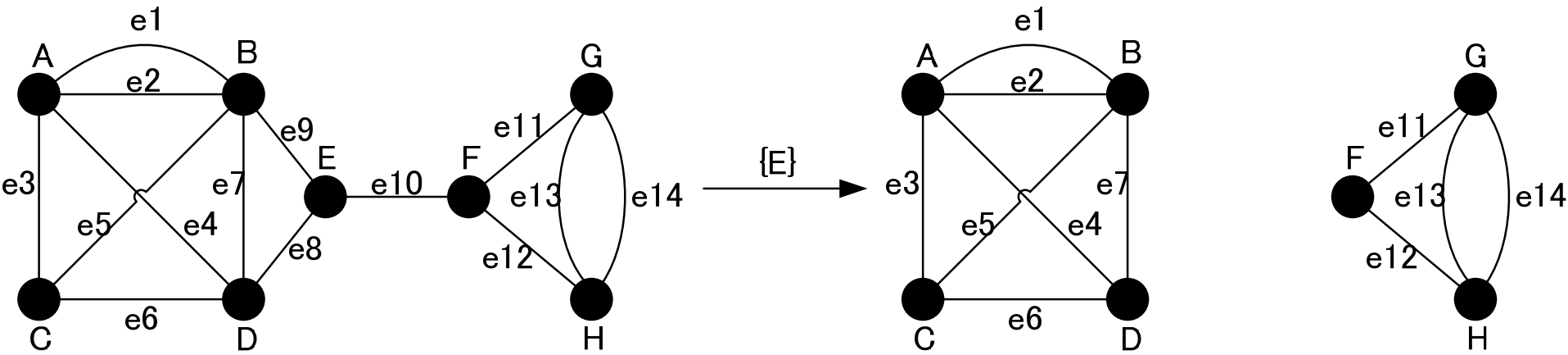
概念の定義 “分離集合”

- それを除去するとグラフが非連結となる点の集合。
- 点を除去すると、その接続辺も全て除去される。



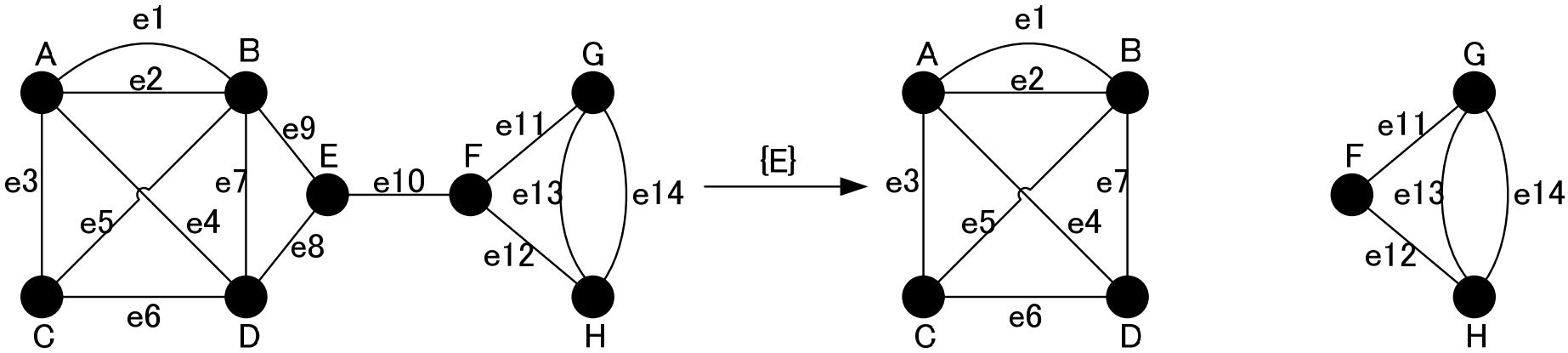
概念の定義 “カット点”

- 1個の点だけからなる分離集合。



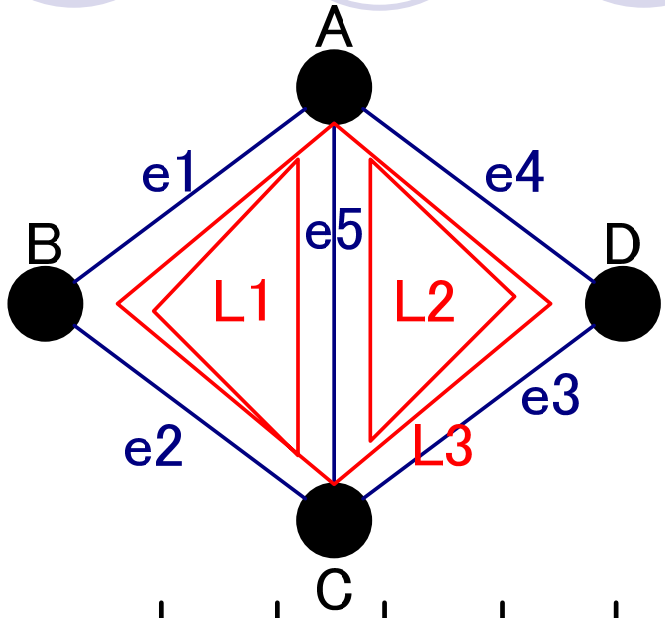
概念の定義 “連結度”

- グラフGの最小な分離集合の大きさ。
- 式 : $k(G)$
- $k(G) \geq k$ とき、グラフGはk-連結であるという。
- 例えば、以下の図の連結度は1である。



概念の定義 “タイセット行列”

- 無向グラフGのタイセット行列（tie-set matrix)Bとは、各行がGの閉路Liに、各列jが枝 $j \in E(G)$ に対応して表される行列である。

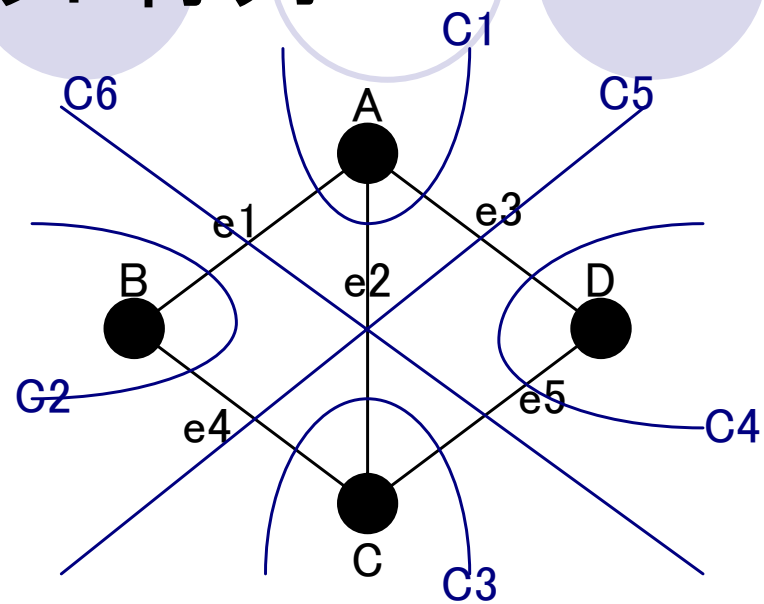


$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i\text{が枝}j\text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} & B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

概念の定義 “カットセット行列”

- グラフGのカットセット行列（cut-set matrix）Cとは、各行iがGのカットセットCiに、各列jが枝 $j \in E(G)$ に対応して表される行列である。



$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{が枝} j \text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$C = \begin{array}{c} \\ C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

例題4.1 – 問題

例題 4.1

連結単純グラフ G の点集合は $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ であり, m 本の辺および t 個の三角形があるとする. 以下の (1)〜(3) に答えよ.

(1) G の隣接行列を $\boldsymbol{A}$ とすると, 行列 $\boldsymbol{A}^2$ の ij 要素は v_i と v_j 間の長さ 2 の歩道の個数に等しいことを示せ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}^2$ の対角要素の総和は $2m$ であることを示せ.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}^3$ の対角要素の総和は $6t$ であることを示せ.

例題4.1 – 解答補足

- 単純連結グラフ
  - 多重辺やループが含まれず、どの2つの点も道で結ばれているグラフ。
- 隣接行列
  - 点 i と点 j を結ぶ辺の本数（次数）を第 ij 要素とする $n \times n$ 行列。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行列の積
  - 行列Aと行列Bがあるとき、AB=Cとなる行列Cの (i, j) 成分 c_{ij} は以下の式によって与えられる。

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

例題4.1 – 解答(1)-1

連結グラフGに関する$n \times n$の隣接行列を、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と置くと、隣接行列の自乗A^2のij要素b_{ij}は行列の積の公式より

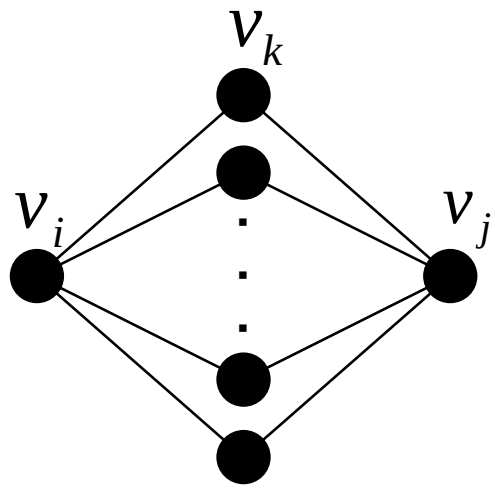
$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

である。

例題4.1 – 解答(1)-2

ところで、グラフGにはt個の三角形が存在するため、点の個数は最低3個無ければならない。

つまり、点v_iと点v_jの間には点v_kがあり、隣接行列の定義からa_{ik}は点v_iと点v_kを結ぶ辺の本数であり、a_{kj}は点v_kと点v_jを結ぶ辺の本数であるから、積$a_{ik}a_{kj}$は点v_iから点v_kを経由して点v_jに至る長さ2の歩道の数に相当する。尚、グラフGには多重辺が存在しないため、積$a_{ik}a_{kj}$は必ず1となる。



例題4.1 – 解答(1)-3

そして、この積$a_{ik}a_{kj}$を足しあげた

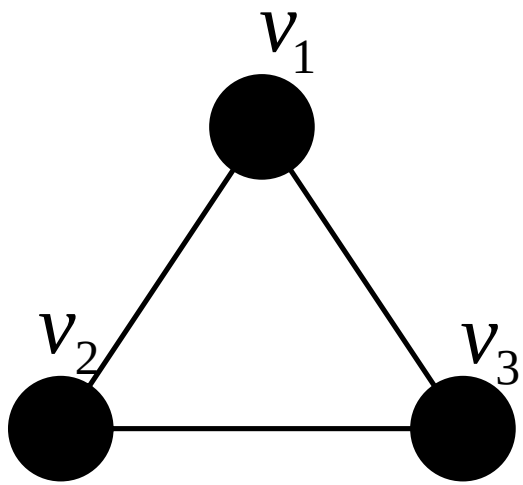
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = b_{ij}$$

は、v_iからv_jへ至る長さ2の歩道の数である。

すなわち、A^2の ij要素はv_iからv_jへ至る長さ2の歩道の数に等しい。

例題4.1 – 解答(1)-4

- 実際に見てみたほうが面白い。
- 注：v1とv3の長さ2の歩道は v1→v2→v3でなければならない。



$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

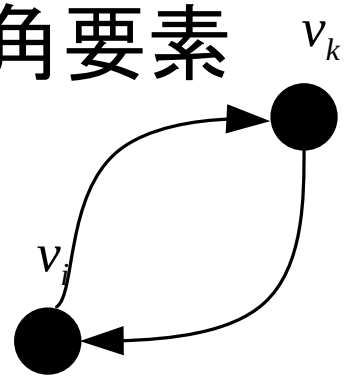
例題4.1 – 解答(2)-1

(1)の結果を考慮すると、行列 $B = A^2$ の対角成分

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

は点 v_i から点 v_j を経由して v_i へ戻る長さ2の歩道の数であると考えられるから、これは v_i と v_j を結ぶ辺の数の2倍になっている。

あとは全ての辺が2倍のため、A^2の対角要素の総和は2mである。



例題4.1 – 解答(3)

- 割愛。
- (1) と(2)の考え方が分かればこれも同様にして解ける。
- それよりも、実際に計算して確認するほうが面白い。

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

例題4.2 – 問題

例題 4.2

連結グラフにおいて, 点 v から w への距離 $d(v,w)$ は v から w への**最短路の長さ**である. このとき, 以下の問い (1)(2) に答えよ.

(1) $d(v,w) \geq 2$ ならば

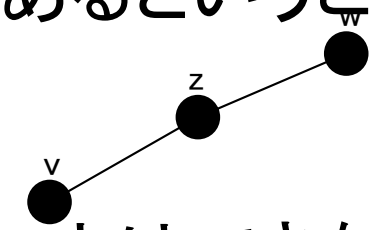
$$d(v,z) + d(z,w) \quad = \quad d(v,w) \tag{43}$$

なる点 z が存在することを示せ.

(2) ピータースン・グラフ (例えば**教科書 p. 23 図 3.4** 参照) において, 任意の異なる 2 点 v と w に対して $d(v,w) = 1$ または $d(v,w) = 2$ であることを示せ.

例題4.2 – 解答(1)

- $d(v,w)$（v,w間の距離）が2以上ということは、以下の図のような状況であるということ。

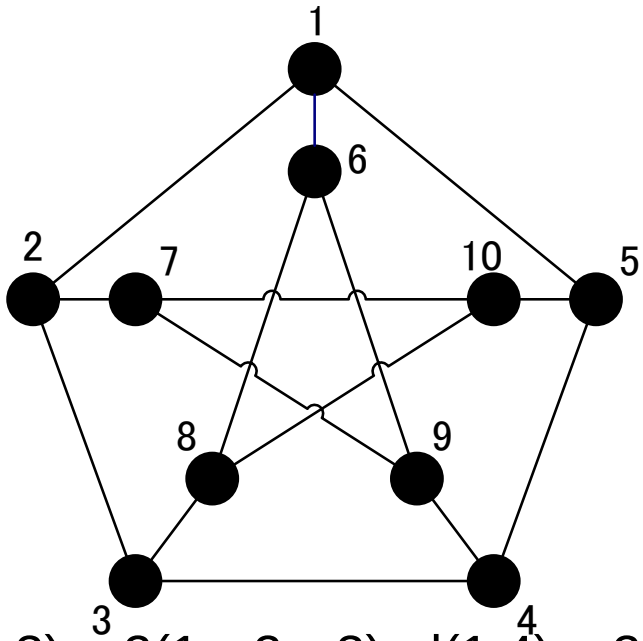


- v,wは直接繋がることはできないため、間にzという点が存在するのは明らか。
- $d(a,b)$はa,b間の距離を表すため、v,z間とz,w間との和がv,w間の長さとなるのも明らかであり、以下の式は成り立つ。

$$d(v,z)+d(z,w)=d(v,w)$$

例題4.2 – 解答(2)

- ピータースン･グラフは外側と内側で対照的なグラフがあるため、そのうちの1つの頂点にのみ挙げれば十分である。



- d(1,2) = 1(1→2), d(1,3) = 2(1→2→3), d(1,4) = 2(1→5→4), d(1,5) = 1(1→5), d(1,6) = 1(1→6), d(1,7) = 2(1→2→7), d(1,8) = 2(1→6→8), d(1,9) = 2(1→6→9), d(1,10)=2(1→5→10)
- d(6,1) = 1(6→1), d(6,2) = 2(6→1→2), d(6,3) = 2(6→8→3), d(6,4) = 2(6→9→4), d(6,5) = 2(6→1→5), d(6,7) = 2(6→9→7), d(6,8) = 1(6→8), d(6,9) = 1(6→9), d(6,10) = 2(6→8→10)

例題4.3 – 問題

例題 4.3

図 64 に与えられたグラフ G について以下の問い (1)〜(5) に答えよ.

(1) G の非連結化集合を一つ挙げよ.
(2) G のカットセットを一つ挙げよ.
(3) G の橋を挙げよ.
(4) G の分離集合を一つ挙げよ.
(5) G のカット点を一つ挙げよ.

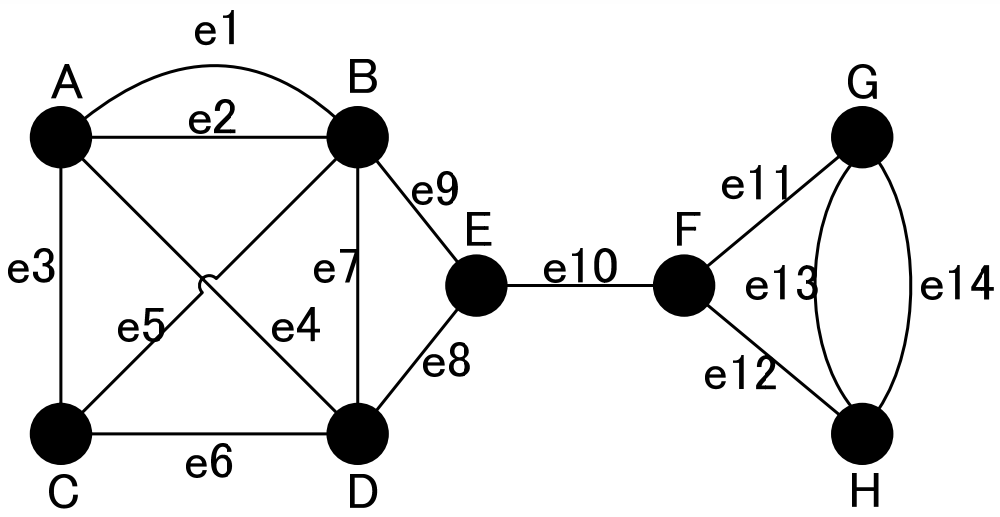
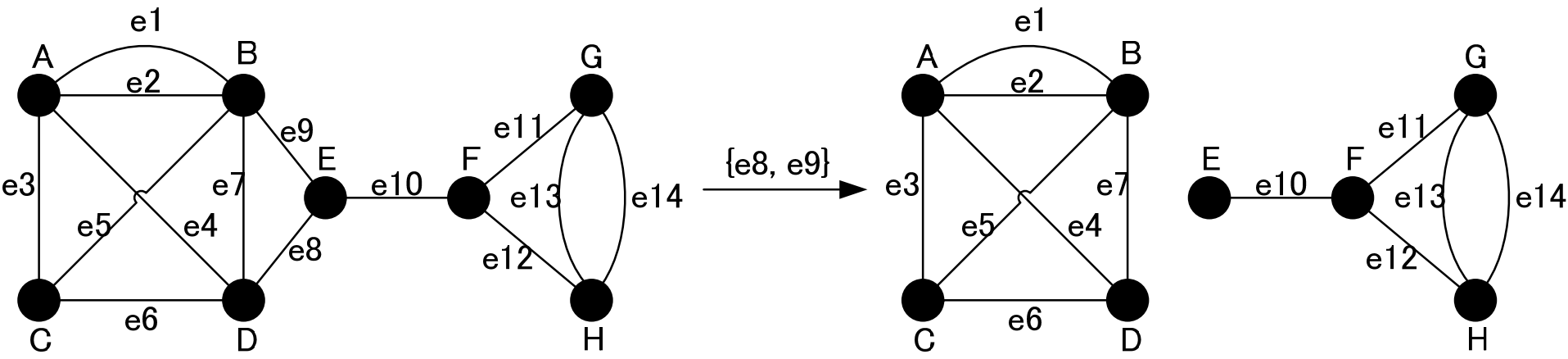


図64

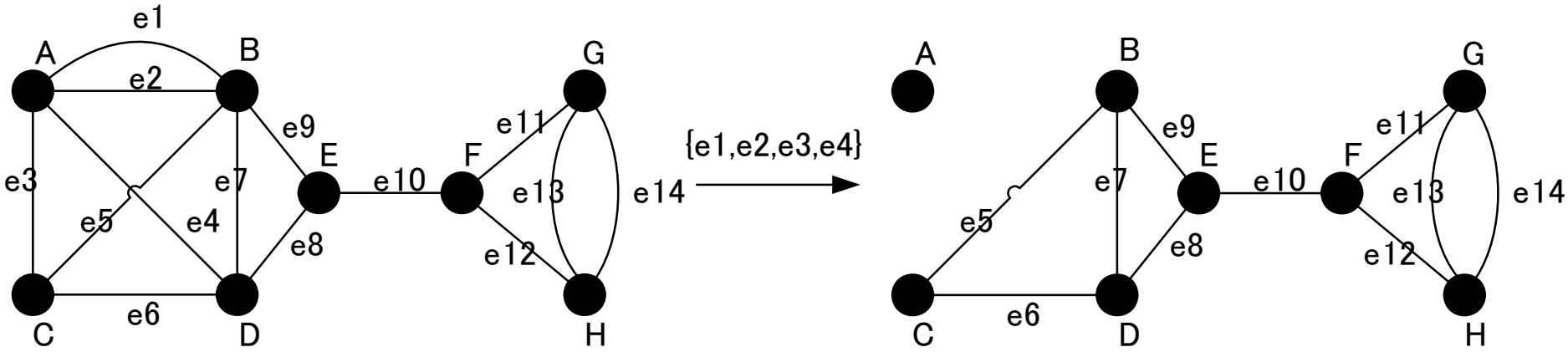
例題4.3 – 解答(1)

- グラフGの非連結集合は{e8, e9}である。



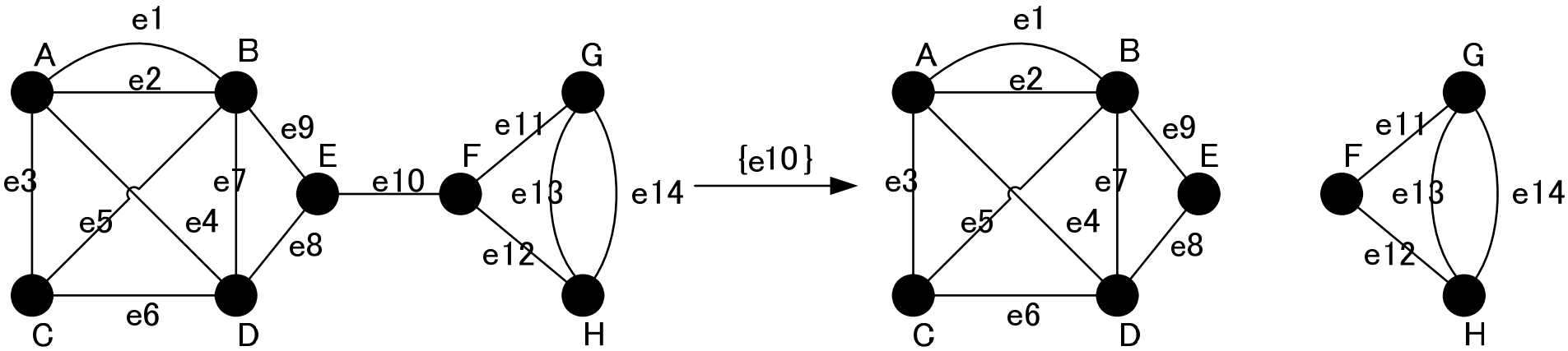
例題4.3 – 解答(2)

- グラフGのカットセットは{e1,e2,e3,e4}である。



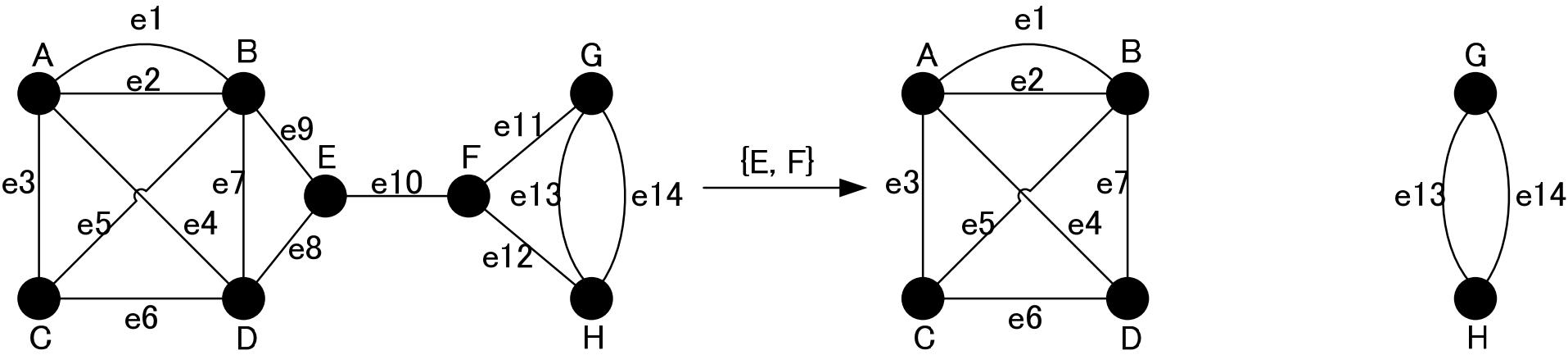
例題4.3 – 解答(3)

- グラフGの橋は{e10}である。



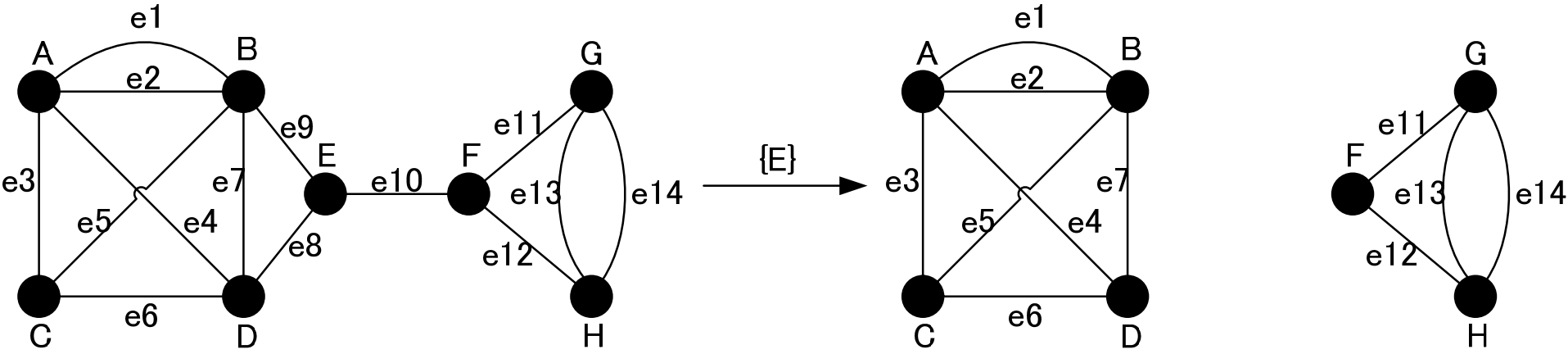
例題4.3 – 解答(4)

- グラフGの分離集合は{E, F}である。



例題4.3 – 解答(5)

- グラフGのカット点はEである。



例題4.4 – 問題

例題 4.4

(1) 図 66 のグラフ G の閉路を全て求めよ (それぞれに $L_1, L_2, \cdots$ のようなラベルを付けよ).
(2) グラフ G のカットセットを全て求めよ (それぞれに $C_1, C_2, \cdots$ のようなラベルを付けよ).
(3) グラフ G のタイセット行列 B を求めよ.
(4) グラフ G のカットセット行列 C を求めよ.
(3) タイセット行列 B とカットセット行列 C の間に次の関係式が成り立つことを示せ.

$$BC^T \equiv 0 \pmod 2 \tag{48}$$

ただし, C^T は行列 C の転置行列を表し, $\mathbf{0}$ は全ての成分がゼロである行列として定義される.

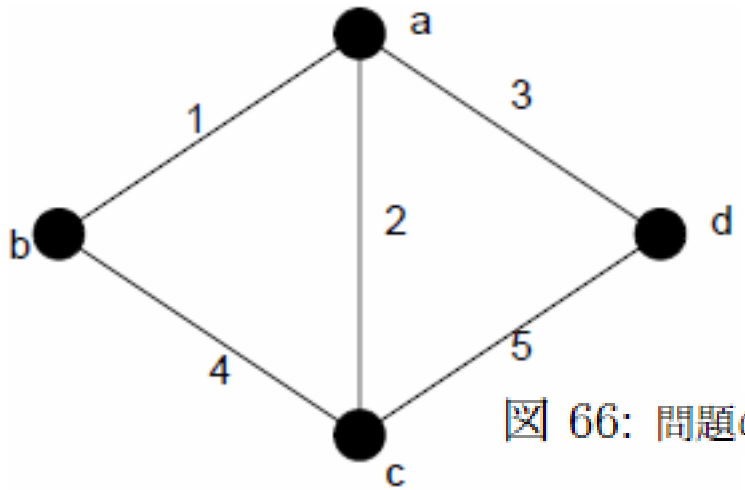
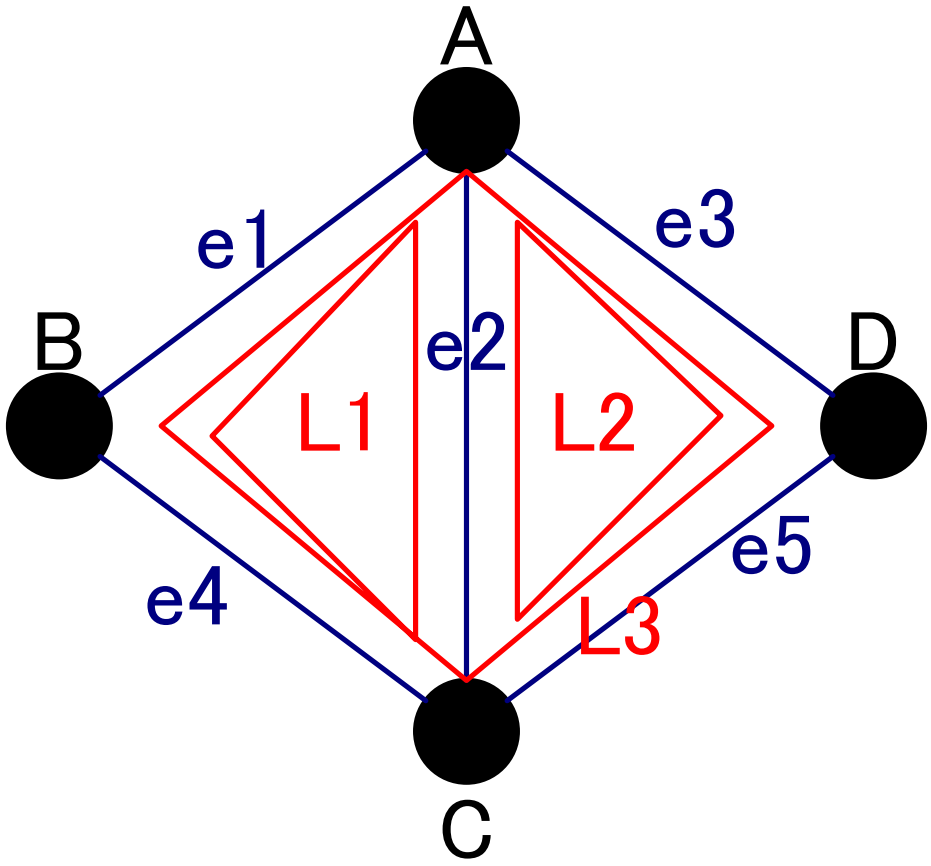
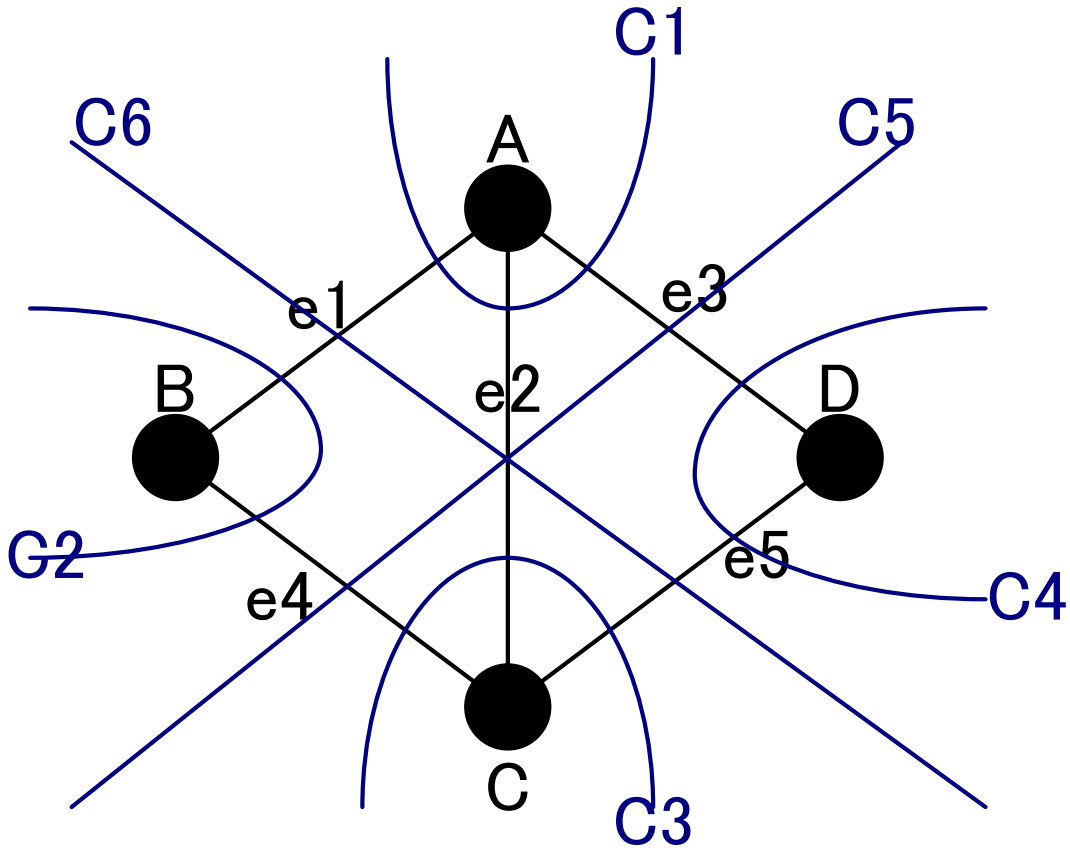


図 66: 問題のグラフ G.

例題4.4 – 解答(1)



例題4.4 – 解答(2)



例題4.4 – 解答(3)

- (1)で示した図を見ながら1つ1つの閉路を見て行けば以下のようになる。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例題4.4 – 解答(4)

- 同じく、(2)で示したカットセットを1つ1つ見て行けば、以下のようになる。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題4.4 – 解答(5)-1

- $BC^T \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$
- C^TとはCの転置行列のことを指し、転置行列とは以下のような行列のことを指す。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題4.4 – 解答(5)-2

$$BC^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC^T \bmod 2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \bmod 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- よって題意は満たされる。

例題4.5 – 問題

例題 4.5

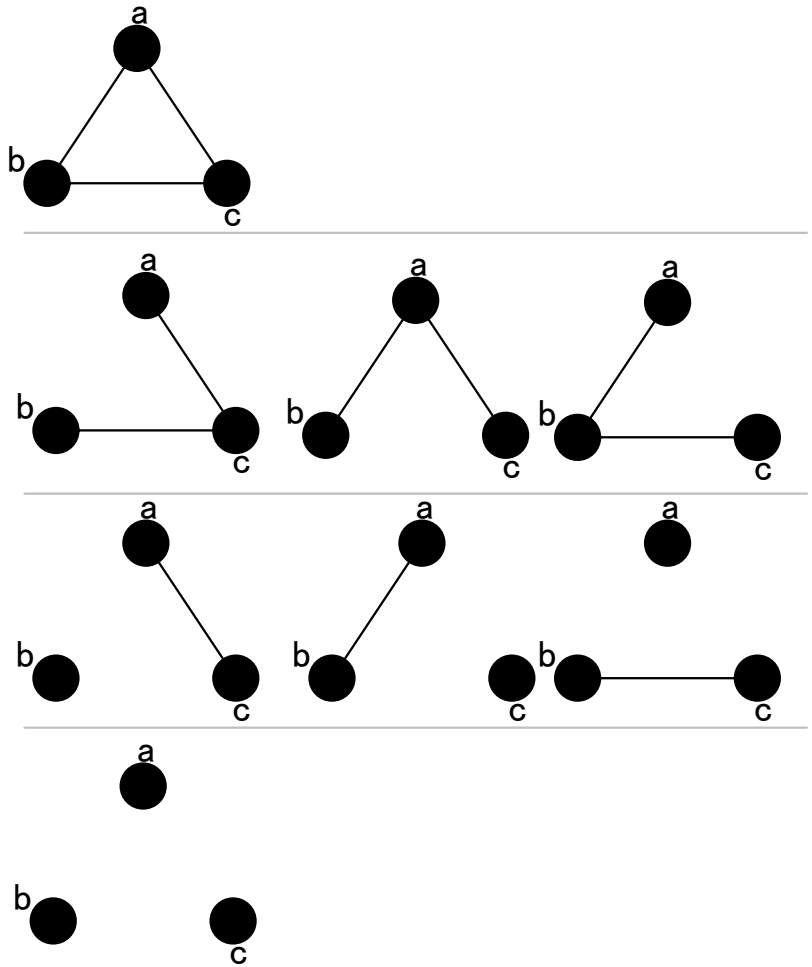
1. 完全グラフ K_3 に関し, その各点がサーバに対応し, K_3 のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率 q で断線する場合, グラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能することがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度) R を p の関数として求め, 図示せよ.

2. 今回の講義で学んだ「閉路」「カットセット」に関して以下の問いに答えよ.
   (1) グラフの中に辺 e を含む閉路が 2 つある場合, e を含まない閉路があることを例を挙げて示せ.
   (2) グラフの中に辺 e を含むカットセットが 2 つある場合, e を含まないカットセットがあることを例を挙げて示せ.

例題4.5 – 解答(1)-1

- 右のような3つのサーバーからなるネットワークを考えた場合の全通りのグラフを示す。
- この図からネットワークが正常に動作するのは上から2番目までに限り、それぞれの確率は

  $(1-q)^3, 3q(1-q)^2$となる。



例題4.5 – 解答(1)-2

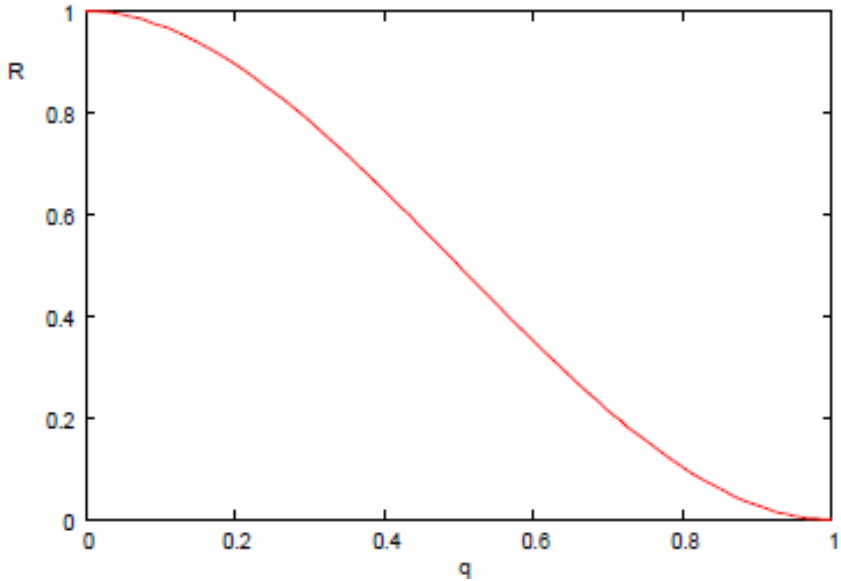
- 余事象の確率を出すには(1-事象の確率)とすることで表され、この場合、「ネットワークが正常に動作する確率」とはqの定義である、「各辺が切断する確率」の反対の「各辺が切断しない確率」のことを指すので、(1-q)となる。
- また、乗法定理では複数の事象の確率を掛け合わせることによって統合した確率が出るので、各辺の確率(1-q)をそれぞれの3つの辺分掛け合わせることによって、完全グラフで有り続ける確率が出る。

例題4.5 – 解答(1)-3

- 1本だけ断線する確率とは、1本断線する確率に2本断線しない確率なので、q(1-q)^2となり、3通り分あるので、それを3倍することによって得られる。
- Rはこれら両者の和で与えられるため、Rは

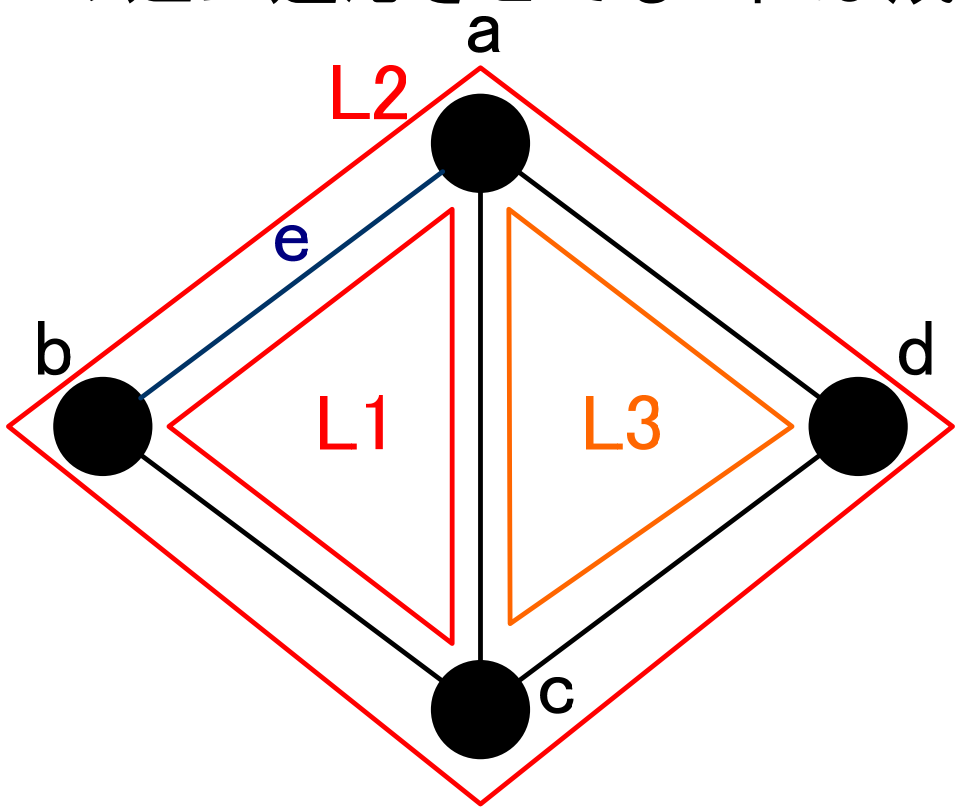
$$R(q) = (1-q)^3 + 3q(1-q)^2$$

となり、図は以下のようになる。



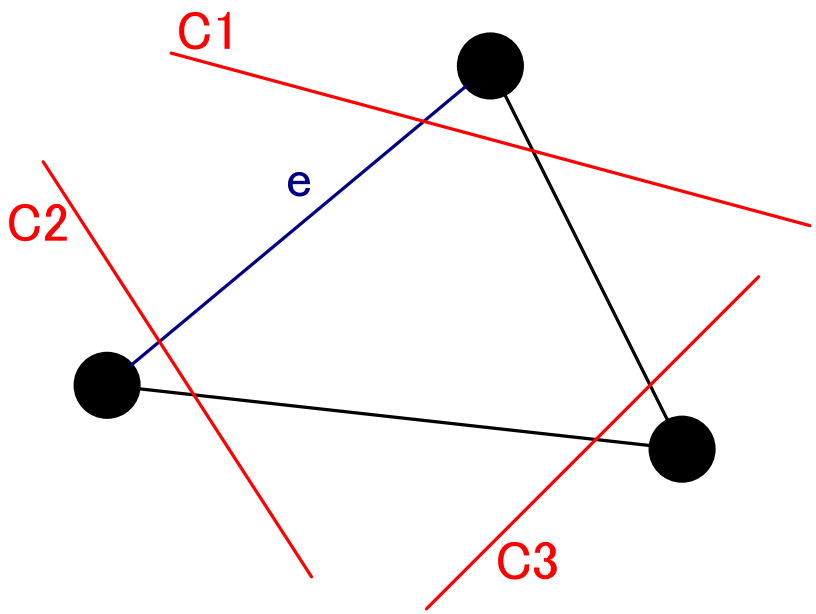
例題4.5 – 解答(2)-1

- 下図のように、辺eを含む閉路2つがあるとき、L3のようなeを含まない閉路は必ず存在する。
- 尚、eをどこの辺に適応させてもこれは成り立つ。



例題4.5 – 解答(2)-2

- 下図のように、辺eを含むカットセットが2つがあるとき、C3のようなeを含まないカットセットは必ず存在する。
- 尚、eはどの辺に適応させてもこれは成り立つ。



演習問題4 – 問題

演習問題 4

グラフ G_1 と G_2 の**結び**: $\mathsf{G} = \mathsf{G}_1 + \mathsf{G}_2$ とは点集合：$V(\mathsf{G}) = V(\mathsf{G}_1) \cup V(\mathsf{G}_2)$, および, 辺集合：$E(\mathsf{G}) = E(\mathsf{G}_1) \cup E(\mathsf{G}_2) \cup \{uv | u \in V(\mathsf{G}_1)$ かつ $v \in V(\mathsf{G}_2)\}$ を持つグラフのことである．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 完全グラフ K_2 と K_3 の結びを図示せよ．

(2) 点集合が n 個の部分集合 V_i $(i = 1, \cdots, n)$ に分割され, G のどの辺もその端点を異なる部分集合内にあるようにできるものを n 部グラフと呼ぶが, この n 部グラフが特に, 分割の任意の部分集合内にある各点が, その他の部分集合内にある全ての点と結びつけられるとき, そのグラフを**完全 n 部グラフ**と呼び, $\mathsf{K}_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$ $(p_i = |V_i|)$ と書く．このとき,

$$\mathsf{K}_{p_1,p_2,\cdots,p_n} = \overline{\mathsf{K}}_{p_1} + \overline{\mathsf{K}}_{p_2} + \cdots + \overline{\mathsf{K}}_{p_n} \tag{52}$$

が成り立つことを示せ．ただし, $\overline{\mathsf{G}}$ はグラフ G の補グラフを表すものとする．(※ わかりにくければ, 実際に $\mathsf{K}_{2,2,2}$ の場合を図示してみよ.)

演習問題4 – 解答

- 難しいので割愛…