SAS 第二回

定義と例

clothoid

目次

- 目的
- 予備知識
- いろいろなグラフの定義と例
- 例題と演習問題の解説

目的

グラフ理論に現れる数々の定義をより正確な記述を下に，理解する。

集合 — 予備知識

対象の集まりであって，それが曖昧さなく概念的に特徴づけられているものを**集合（set）**と呼ぶ。集合 X に属する対象を X の**元**または**要素（element）**という。対象 x が集合 X に属することを $x \in X$ または $X \ni x$ と記し，対象 y が集合 X に属さないことを $y \notin X$ と記す。
対象 $x_1, x_2, \cdots$ からなる集合を $\{x_1, x_2, \cdots\}$ のように記す。

また，元を有しない集合も集合と考え，**空集合（emptyset）**という。

写像 — 予備知識

X の各元 x に対して，Y の元 y をただ唯一定める対応 $f : x \mapsto y$ を X から Y への**写像**という。f が X から Y への写像であることを $f : X \longrightarrow Y$ と表す。
$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする。$f(X) = Y$ のとき，f は**全射**または **Y の上への写像**であるという。$x \neq x'(x, x' \in X)$ ならば，つねに $f(x) \neq f(x')$ であるとき，写像 f は **1 対 1** または**単射**であるという。

$f : X \longrightarrow Y$ が単射のとき，$f(X) = Z$ とすれば，Z から X への写像 $g : Z \longrightarrow X$ を $g(y) = x$ によって定義できる。ただし，x は $f(x) = y$ となる $x \in X$ である。G を単射 f の**逆写像**と呼び，記号的に $g = f^{-1}$ と表す。

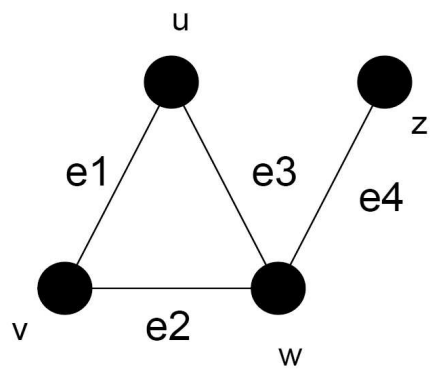
点集合 — 定義と例

点集合（vertex set）：$V(\mathrm{G})$
グラフ G において，点のみからなる集合のこと。

例えば，下図において，グラフ G の点集合 $V(\mathrm{G})$ とは，

$$V(\mathrm{G}) = \{u, v, w, z\}$$

のことである。



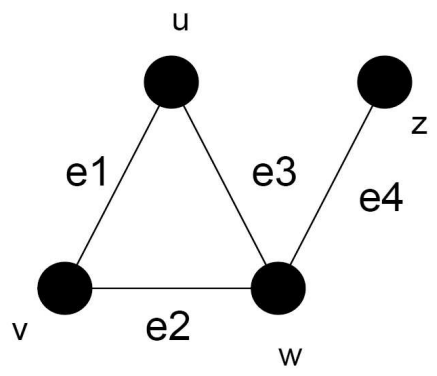
辺集合 — 定義と例

辺集合（edge set）：$E(\mathrm{G})$
グラフ G において，辺のみからなる集合のこと。

例えば，下図において，グラフ G の辺集合 $E(\mathrm{G})$ とは，

$$E(\mathrm{G}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

のことである。



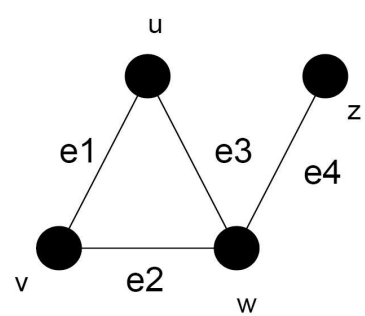
接続関数 — 定義と例

接続関数（incidence function）：ψ_{G}
グラフ G の各辺に G の頂点の対を対応させる関数のこと。

例えば，下図において，グラフ G の接続関数 ψ_{G} とは，

$$\psi_{\mathrm{G}}(e_1) = uv, \qquad \psi_{\mathrm{G}}(e_2) = vw,$$
$$\psi_{\mathrm{G}}(e_3) = wu, \qquad \psi_{\mathrm{G}}(e_4) = wz.$$

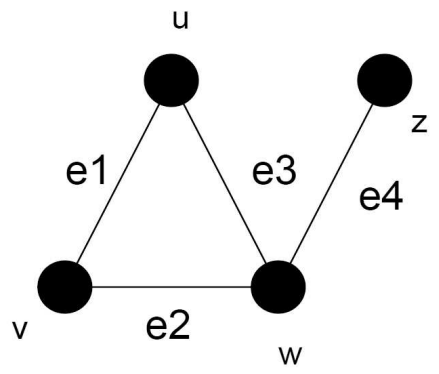
のことである。



単純グラフ — 定義と例

単純グラフ
グラフにループが含まれず，頂点のどの対も高々1 つのリンクで結ばれているグラフのこと。

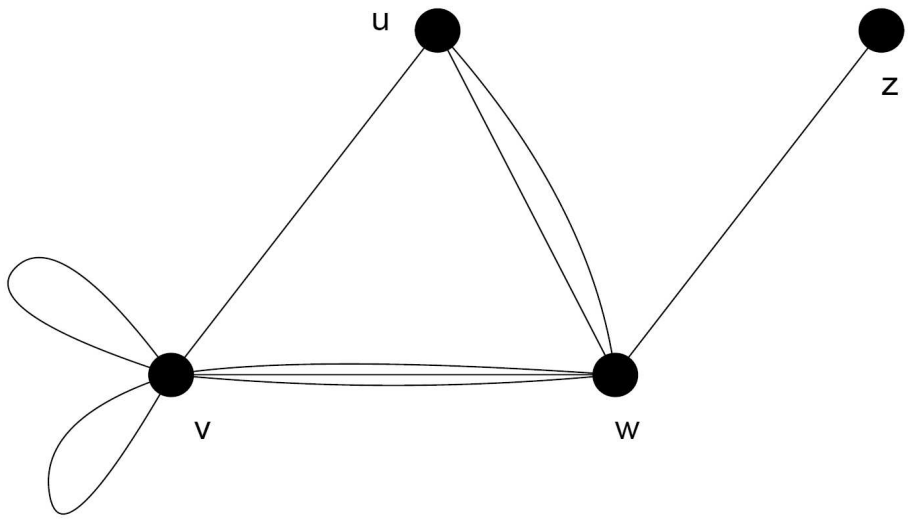
例えば，下図のグラフ G は単純グラフである



一般グラフ — 定義と例

一般グラフ（general graph）
ループや多重辺をも許されたグラフのこと。

例えば，下図のグラフは一般グラフである。



同型 — 定義と例

2 つのグラフ G_1 と G_2 の間に一対一の対応関係があり，G_1 の任意の 2 点を結ぶ辺数が G_2 の対応する 2 点を結ぶ辺数に等しいとき，G_1 と G_2 は**同型（isomorphic）**であるという。

例えば，下図のグラフ G_1 と G_2 は同形である。

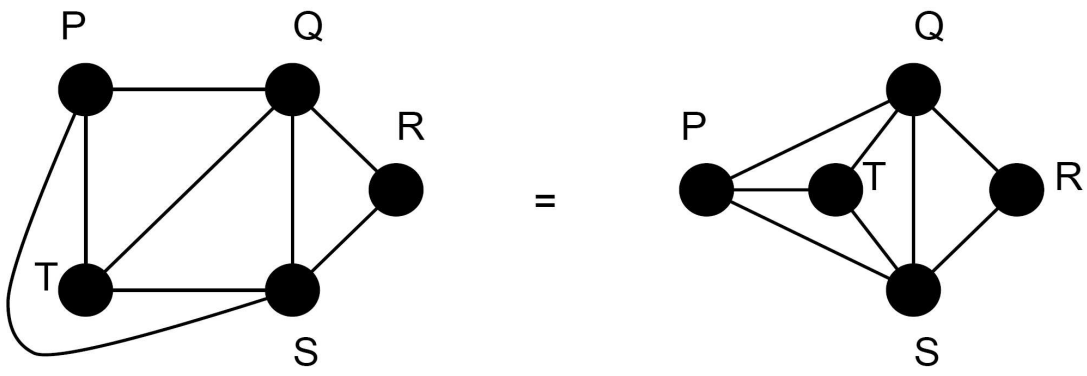


Figure 1: グラフ G_1（左図）とグラフ G_2（右図）

同型写像 — 定義

2 つのグラフ G_1，G_2 が与えられ，1 対 1 写像

$$\theta : V(\mathrm{G}_1) \to V(\mathrm{G}_2)$$
$$\phi : E(\mathrm{G}_1) \to E(\mathrm{G}_2)$$

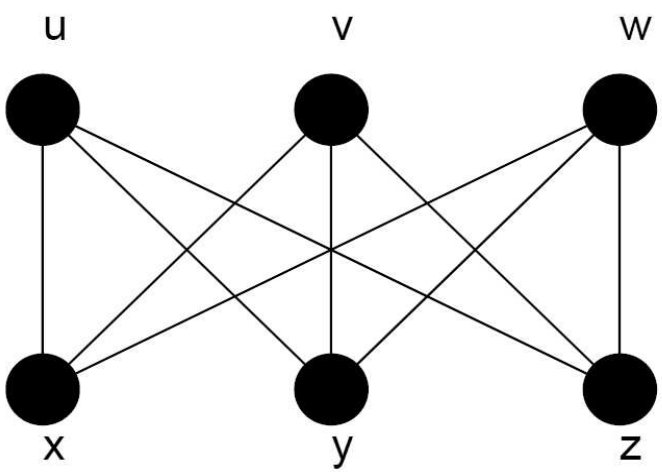
が，$\forall e \in E(\mathrm{G}_1)$ に対し，次の関係，

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(e) = uv \Longleftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

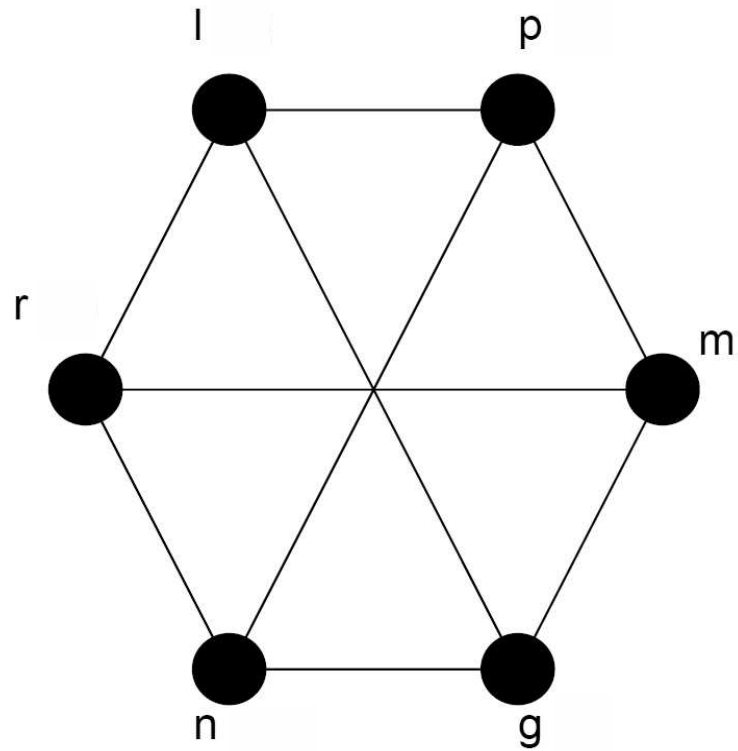
を満たすとき，写像の対 (ϕ, θ) を G_1，G_2 間の**同型写像**という。

同型写像 — 例

下図のようなグラフ G_1 と G_2 を考える。



G1



G2

同型写像 — 例（つづき）

いま，1 対 1 写像 θ を次のように定める。

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n,$$
$$\theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

また，1 対 1 写像 ϕ を次のように定める。

$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp}, \phi(\overline{uy}) = \overline{lq}, \phi(\overline{uz}) = \overline{lr}$$
$$\phi(\overline{vx}) = \overline{mp}, \phi(\overline{vy}) = \overline{mq}, \phi(\overline{vz}) = \overline{mr}$$
$$\phi(\overline{wx}) = \overline{np}, \phi(\overline{wy}) = \overline{nq}, \phi(\overline{wz}) = \overline{nr}$$

また，多重辺を含まないため，接続関数の逆関数 $\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}$ が定義できる。以上より，

同型写像 — 例（つづき 2)

$$
\begin{aligned}
& \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ux}) && = ux \\
\Leftrightarrow \quad & \overline{ux} && = \psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ux) \\
\Leftrightarrow \quad & \phi(\overline{ux}) && = \phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ux)) \\
\Leftrightarrow \quad & \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) && = \psi_{G_2}(\phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ux))) \\
& && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ux})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{lp}) = lp = \theta(u)\theta(x)
\end{aligned}
$$

であるから，$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ux}) = ux \Leftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ux})) = \theta(u)\theta(x)$。他の点，辺についても同様にして示されるので，

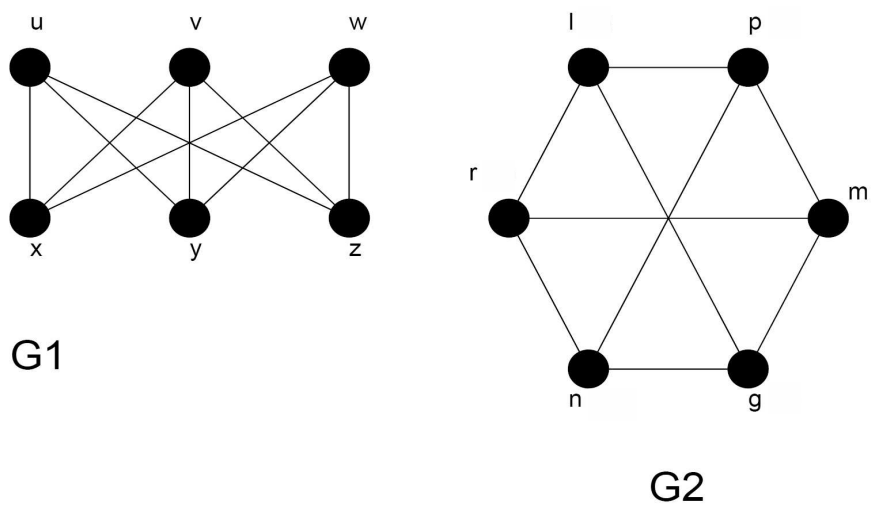
$$\psi_{G_1}(e) = uv \Longleftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

の関係が満たされ，(θ, ϕ) は同型写像であり，G_1 と G_2 は同型。

同型 — 再定義

2 つのグラフ G_1，G_2 が与えられ，その間に同型写像が存在する場合，G_1 と G_2 は**同型（isomorphic）**であるといい，$G_1 \cong G_2$ と表す。

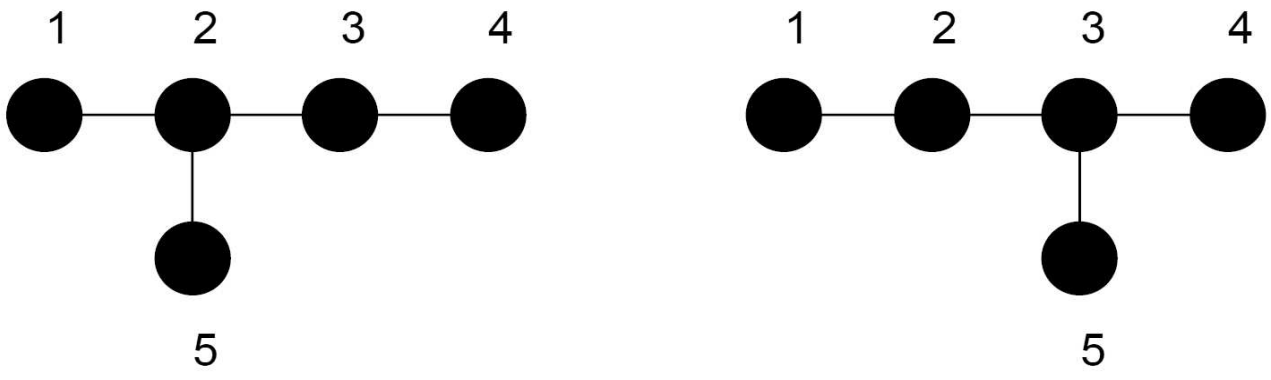
例えば，以下のグラフには前述したとおり同型写像が存在するため，$G_1 \cong G_2$ である。



ラベル付き（なし）グラフ — 定義と例

各点に名前の付けられたグラフを**ラベル付きグラフ**といい，ラベル付きグラフで無いものを**ラベルなしグラフ**という。

例えば，以下のグラフはラベル付きグラフであり，2 つのグラフは異なるものとして扱う。



連結される —定義

グラフ G の点 u, v について，G に u, v を結ぶ道（テキスト p.38 参照）があれば，u は v に**連結されている**という。

グラフの成分 — 定義

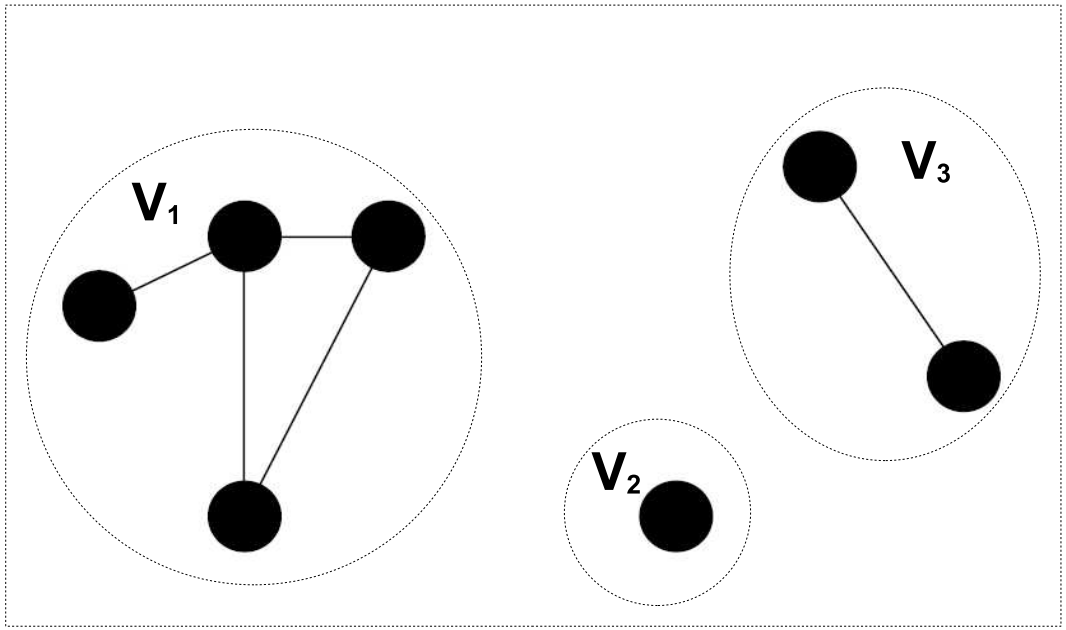
グラフ G を構成する任意の 2 点 u，v に対し，

u は v に連結される $\Leftrightarrow$ u は v と同じ V_i に属する

というルールの下，グラフ G を空でない部分集合 $V_1, V_2 \cdots V_n$ で分けることを考える。このとき，各集合から成る部分グラフ $G(V_1), G(V_2), \cdots G(V_n)$ をそれぞれグラフ G の**成分（component）**と呼ぶ。

グラフの成分 — 例

例えば，以下のグラフ G は V_1, V_2, V_3 に分割でき，成分数は 3 である。

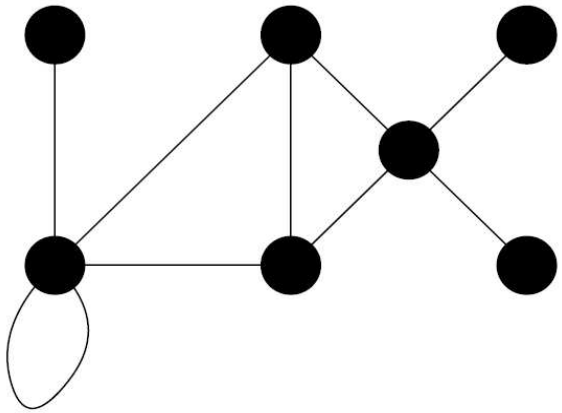


グラフG

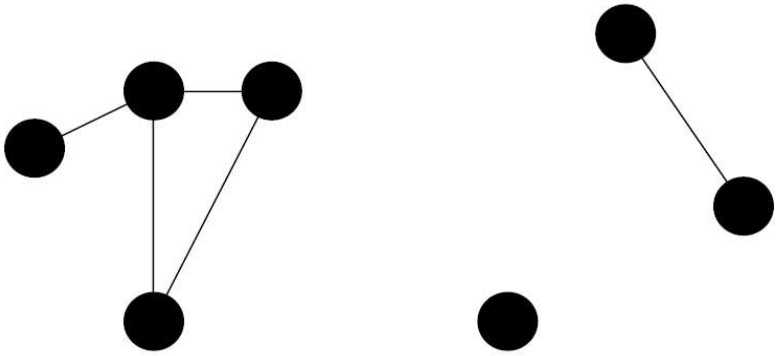
連結，非連結グラフ — 定義と例

成分が 1 つだけのグラフを**連結グラフ（connected graph）**といい，連結グラフでないグラフのことを**非連結グラフ（disconnected graph）**という。

例えば，下図のグラフ G_1 は連結グラフでグラフ G_2 は非連結グラフである。



G_1

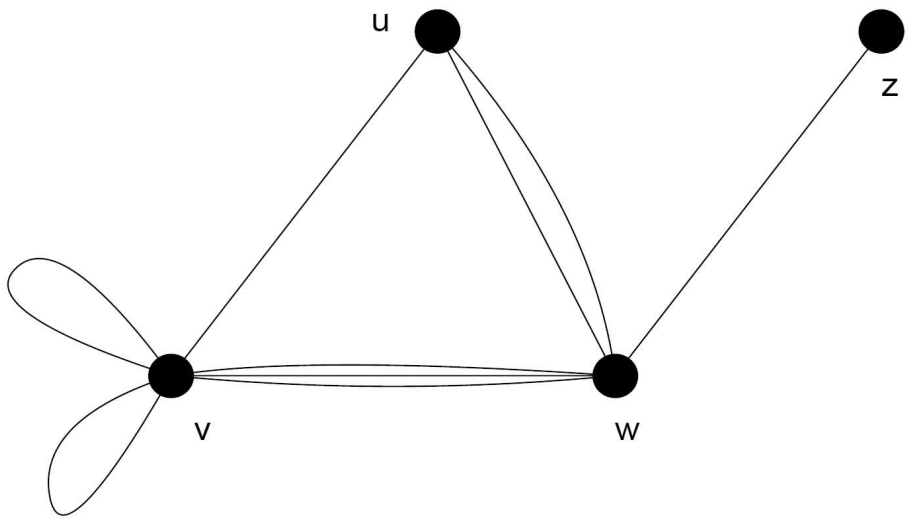


G_2

次数

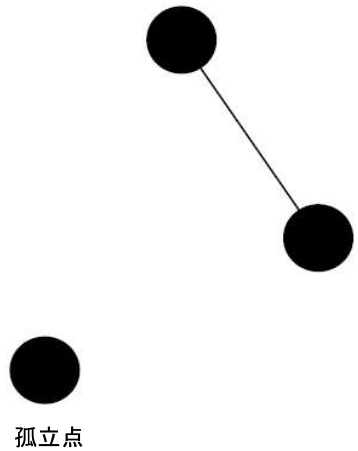
グラフ G において点 v に接続している辺の本数を**次数**（**degree**）といい，$\deg(v)$ と表す。ただし，ループの場合は 2 本とカウントする。

例えば，以下のグラフにおいて $\deg(v) = 8$ である。



孤立点

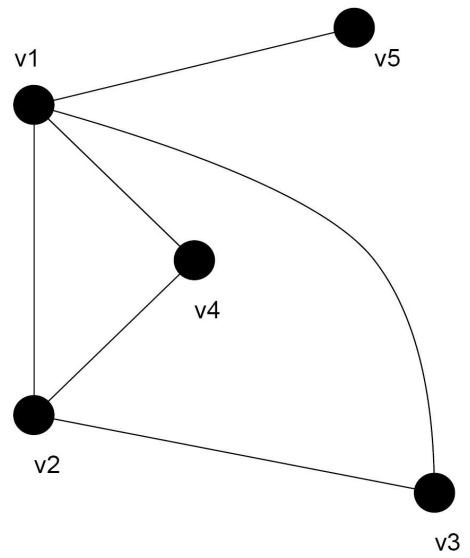
次数がゼロの点を**孤立点（isolated vertex）**という。



端点

次数が 1 の点を**端点（end-vertex）**という。

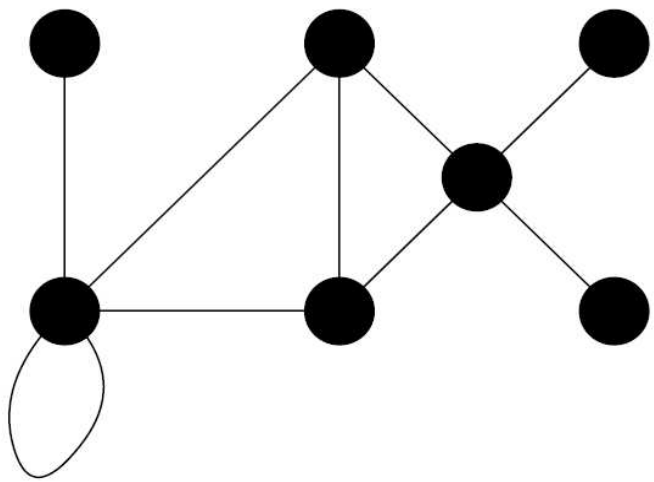
例えば，下図で v_5 は端点。



次数列

次数を増加順に記したものを次数列（degree sequence）という。

例えば，以下のグラフにおける次数列は $(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)$ である。



G_1

握手補題（handshaking lemma）

任意のグラフの全ての点の次数を合計すれば必ず偶数になる。

直感的説明

全てのグラフは，たった 1 つの点（次数 0）か，2 つの点と 1 つの線（次数の合計は 2 : 線は必ず二回カウントされる）から成る。したがって，上の命題が成り立つ。

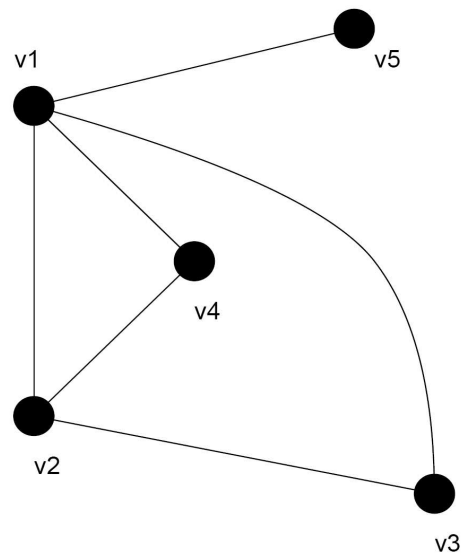
グラフ的 — 定義

整数列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ が与えられたとき，n 個の点からなるグラフ G に対し，各 i について，$\deg(v_i) = d_i$ が正立するとき，数列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ は**グラフ的である**という。

グラフ的 — 例

例えば，(4,3, 2, 2, 1) という数列が与えられた場合，下図のグラフに対し，以下の関係が成立するので，この数列はグラフ的であるといえる。

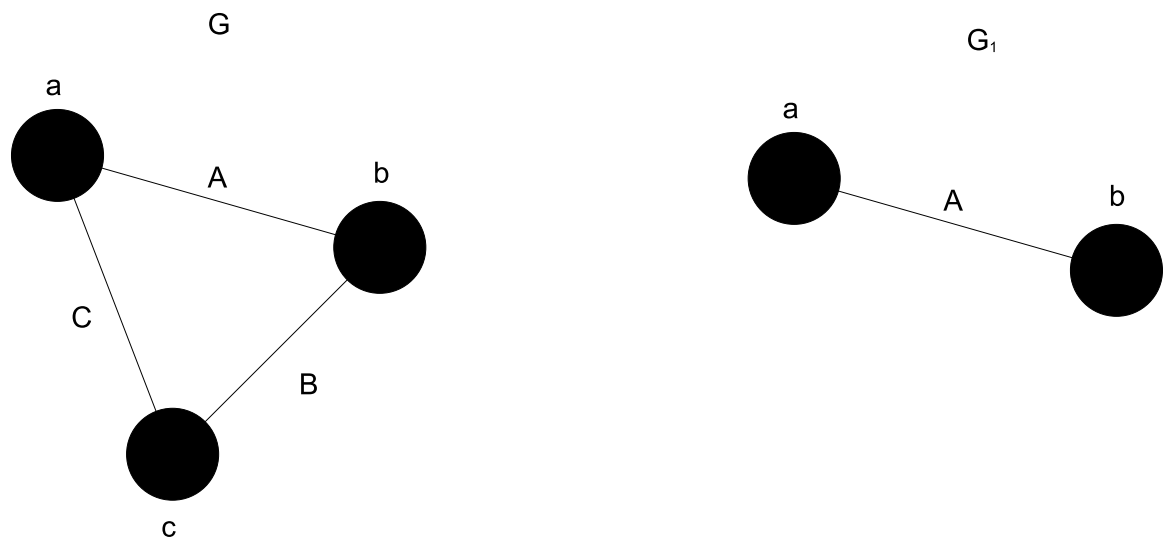
$$\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 3, \deg(v_3) = 2, \deg(v_4) = 2, \deg(v_5) = 1$$



部分グラフ

点が全て $V(\mathrm{G})$ に属し，その辺が全て $E(\mathrm{G})$ に属するグラフをグラフ G の**部分グラフ（subgraph）**という。

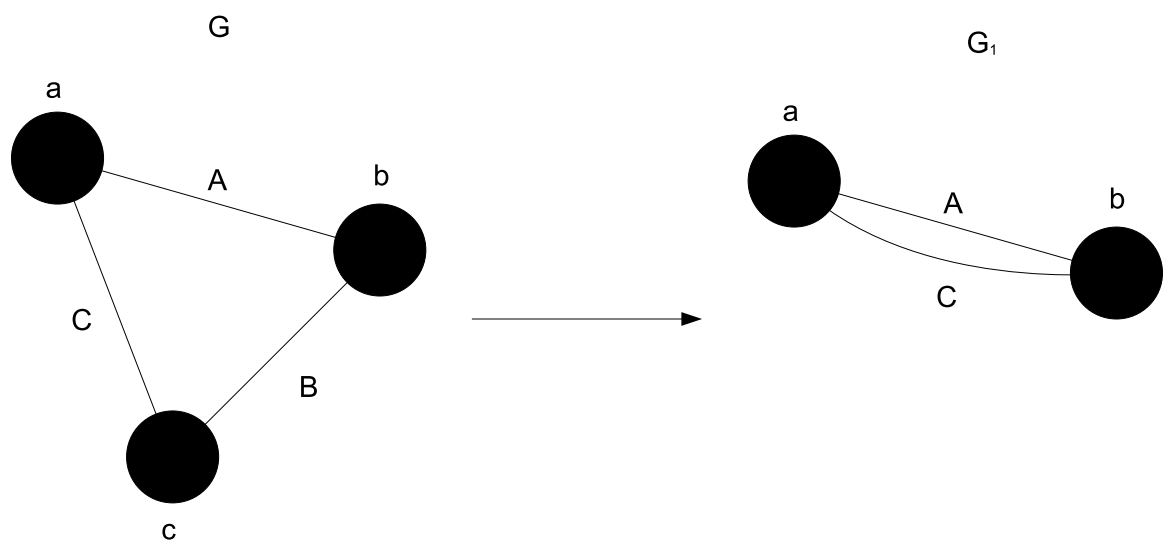
例えば，下図でグラフ G_1 はグラフ G の部分グラフである。



縮約

辺を除去し，その辺の両端についていた 2 点を同一視して 1 点にすることを**縮約**という。

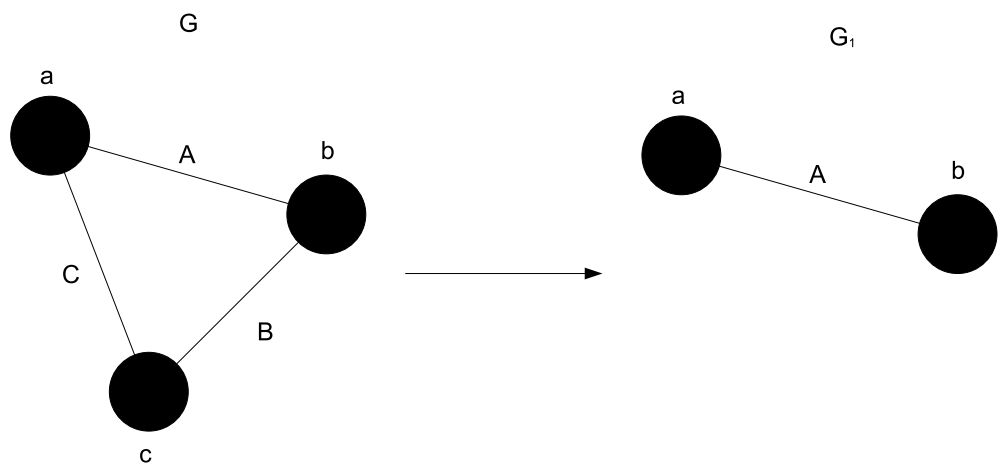
例えば，下図では点 b と点 c を縮約しグラフ G_1 を作成している。



部分グラフと除去，縮約

いかなる場合にも，グラフ G の点と辺の除去，及び，辺の縮約という操作を行うことにより，グラフ G の部分グラフを作る事が出来る。

例えば，以下の例では，辺 C を除去し， 点 b と点 c を縮約した結果，グラフ G の部分グラフ G_1 が得られた。

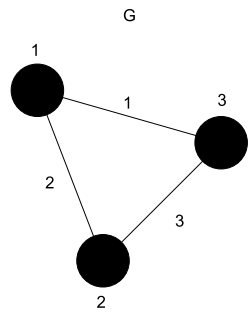


隣接行列

点 i と点 j を結ぶ辺の本数を ij 要素とする $n \times n$ 行列のことを**隣接行列（adjacency matrix）**という。

例えば，下図の隣接行列 A は以下のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



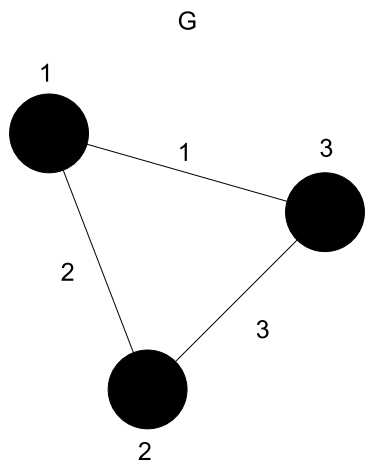
接続行列 — 定義

点 i が辺 j に接続している場合，第 ij 要素が 1 であり，接続していない場合は 0 であるような $n \times m$ 行列のことを**接続行列**（**incidence matrix**）という。（ここではループも 1 として考えるが，ループを 2 とする場合もあるので注意）

接続行列 — 例

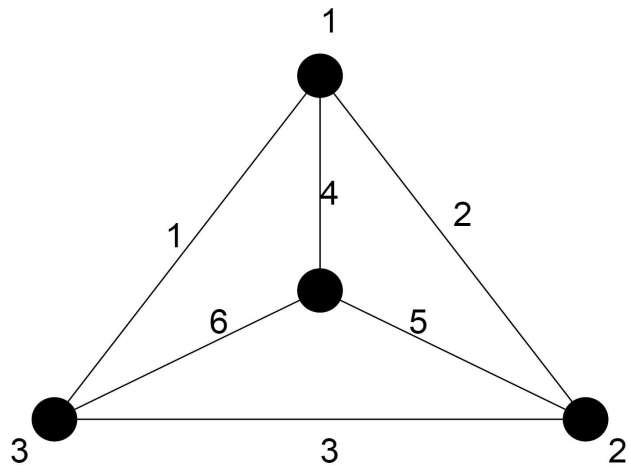
例えば，下図の接続行列 M は以下のようになる。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



例題 2.1 — 問題

図に与えられたグラフについて以下の問いに答えよ。



1. このグラフの次数列を書け。
2. 図のグラフに対して隣接行列 A 及び接続行列 M を求めよ。

例題 2.1 — 1. の解答

このグラフの点は 4 つであり，どの点においても次数は 3 であるから，(3,3,3,3)。

例題 2.1 — 2. の解答

まず，与えられたグラフは点が 4 つあるので，4×4 の行列だと分かる。次に，点 1 に注目すると，点 1 はループを持たなく，点 2，点 3，点 4 とそれぞれ 1 本の辺で連結されている。したがって，隣接行列 A の一列目は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

であると分かる。

例題 2.1 — 2. の解答（つづき）

同様にして，点 2-4 に注目し，接続行列の 2-4 列目を求めると，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

例題 2.1 — 2. の解答（つづき 2）

与えられたグラフには点が 4 つあり，辺が 6 つあることから，隣接行列 M は 4×6 行列であることがわかる。まず，点 1 に注目すると，点 1 に接続されている辺は，辺 1，辺 2，辺 4 であることから，接続行列の 1 行目は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

と分かる。

例題 2.1 — 2. の解答（つづき 3）

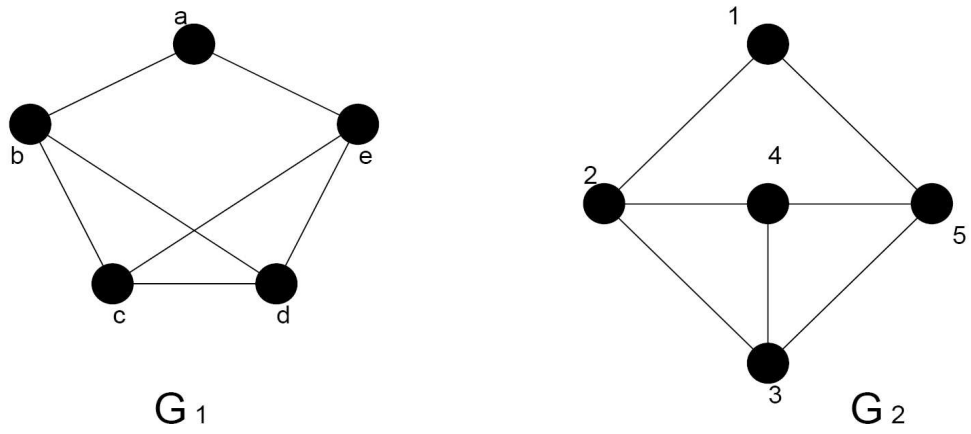
同様にして，点 2-4 に着目し，各辺との連結の有無を調べると，接続行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

例題 2.2 — 問題 1

1. 図の G_1 と G_2 の間の同型写像 ϕ，θ を見つけよ。



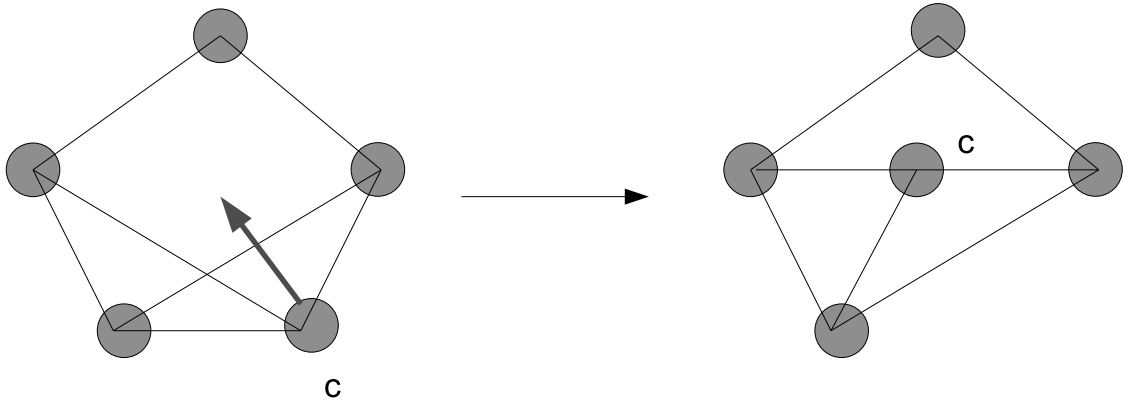
また，G_1 の任意の辺 e 及び点 u，v に対して，

$$\psi_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを，2, 3 の $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ。

例題 2.2 — 1 の解答

グラフ G_1 の点 c をグラフの中心部にもってくると，G_1 が G_2 と同型であることが分かる。



例題 2.2 — 1 の解答（つづき）

したがって，θ，ϕ を次のように定めればよい。

$$\begin{aligned}
\theta &: a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4 \\
\phi &: \overline{ab} \mapsto \overline{12}, \overline{bc} \mapsto \overline{23}, \overline{cd} \mapsto \overline{34}, \overline{bd} \mapsto 24, \\
&\quad \overline{de} \mapsto, \overline{45}, \overline{ce} \mapsto \overline{35}, \overline{ea} \mapsto \overline{51}
\end{aligned}$$

また，多重辺を含まないため，接続関数の逆関数 $\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}$ が定義できる。以上より，

例題 2.2 — 1 の解答（つづき 2）

$$
\begin{aligned}
& \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ab}) && = ab \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{ab} && = \psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ab) \\
\Leftrightarrow\quad & \phi(\overline{ab}) && = \phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ab)) \\
\Leftrightarrow\quad & \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ab})) && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ab))) \\
& && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b)
\end{aligned}
$$

であるから，$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ab})) = \theta(a)\theta(b)$。

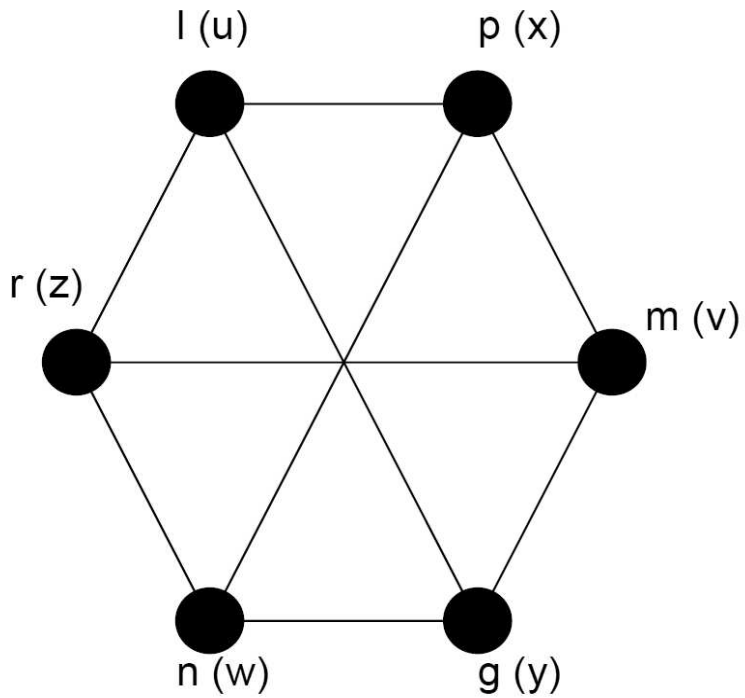
例題 2.2 — 1 の解答（つづき 3）

$$
\begin{aligned}
& \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{bc}) && = bc \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{bc} && = \psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(bc) \\
\Leftrightarrow\quad & \phi(\overline{bc}) && = \phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(bc)) \\
\Leftrightarrow\quad & \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{bc})) && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(bc))) \\
& && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c)
\end{aligned}
$$

であるから，$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{bc})) = \theta(b)\theta(c)$。

例題 2.2 — 問題 2

下図のグラフ G_2 の部分グラフを 2 つ挙げよ。

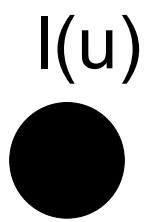


G2

例題 2.2 — 2 の解答

点 l(u)，p(x)，辺 $\overline{\mathrm{l(u)p(x)}}$ 以外を除去すると，

さらに，$\overline{\mathrm{l(u)p(x)}}$ を縮約すると，



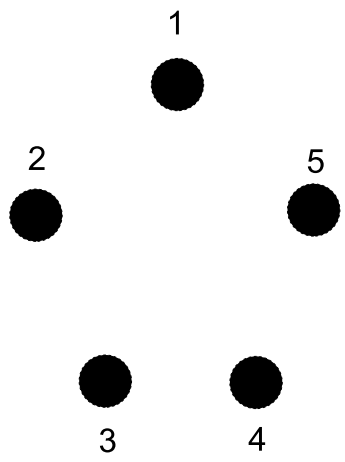
例題 2.2 — 問題 3

次の隣接行列 A，接続行列 M で与えられるグラフをそれぞれ描け。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

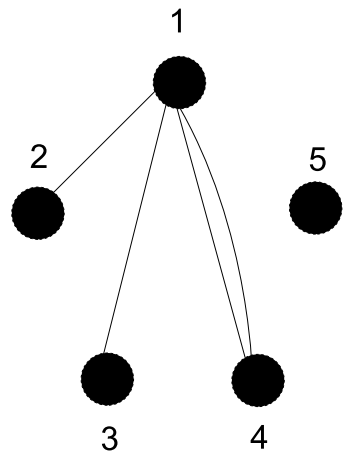
例題 2.2 — 3 の解答

まず，隣接行列 $A \equiv (a_{ij})$ について考える。隣接行列は 5×5 行列であるから，この行列で表されるグラフには点が 5 つあることが分かる。そして，対角成分 a_{ii} が全て 0 であることから，このグラフにはループが含まれないことも分かる。ここまでで，以下のようにグラフが書ける。



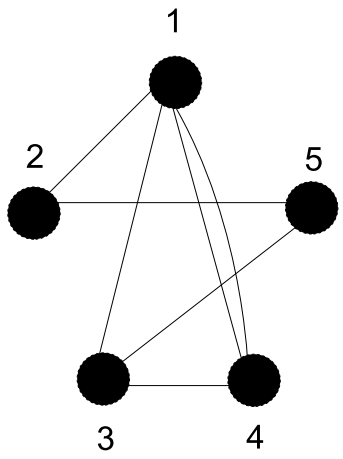
例題 2.2 — 3 の解答（つづき）

次に，行列の第 1 列目に注目する。1 列目は，点 1 とどの点が何本の線で連結されているかを表している。例えば，$a_{21} = 1$ より，点 1 と点 2 は 1 つの線でつながっており，$a_{41} = 2$ より，点 1 と点 4 は 2 本の線で繋がっている事が分かる。すなわち，第一列目に注目すると，以下の図が描ける。



例題 2.2 — 3 の解答（つづき 2）

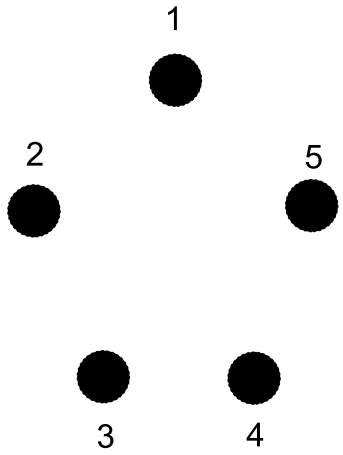
同様にして，2–5 列目に注目して，点と線を書き込んでいくと



となる。このとき，$a_{ij} = a_{ji}$ であることに注意すると書きやすい。

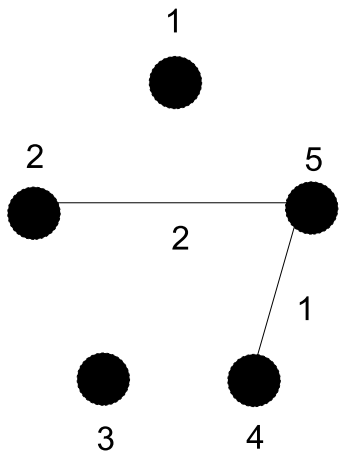
例題 2.2 — 3 の解答（つづき 3）

接続行列 M について考える。まず，行列のサイズから，5 つの点と 8 つの辺があることが分かる。



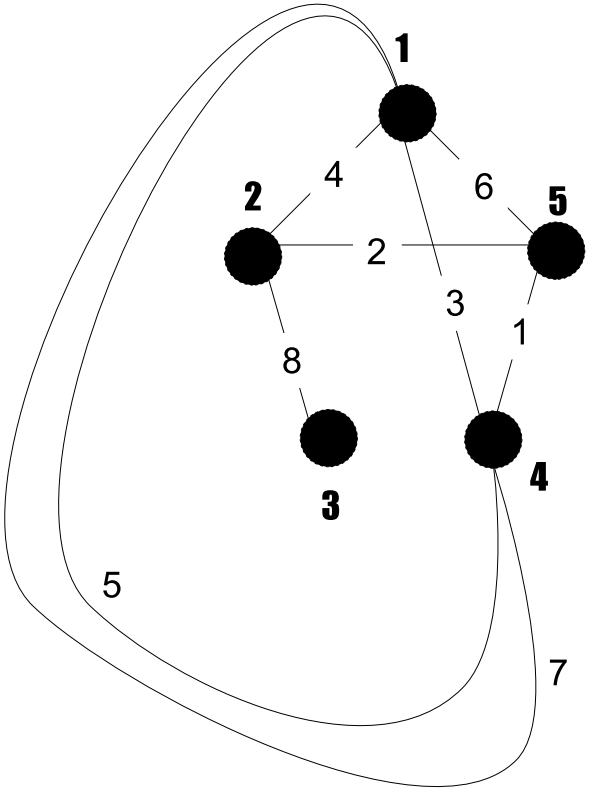
例題 2.2 — 3 の解答（つづき 4)

次に，辺 1 の関係を表す第 1 列目に注目する。第 1 列では，$a_{41} = a_{51} = 1$ で，その他は 0 であることから，辺 1 は点 4 と点 5 を結んでいる事が分かる。また，辺 2 の関係を表す第 2 列目に注目すると，$a_{22} = a_{52} = 1$ で，その他は 0 であるから，辺 2 は点 2 と点 5 を結んでいることがわかる。



例題 2.2 — 3 の解答（つづき 5）

同様に，3-5 列目について，図に書き込んでいくと，以下のようになる。

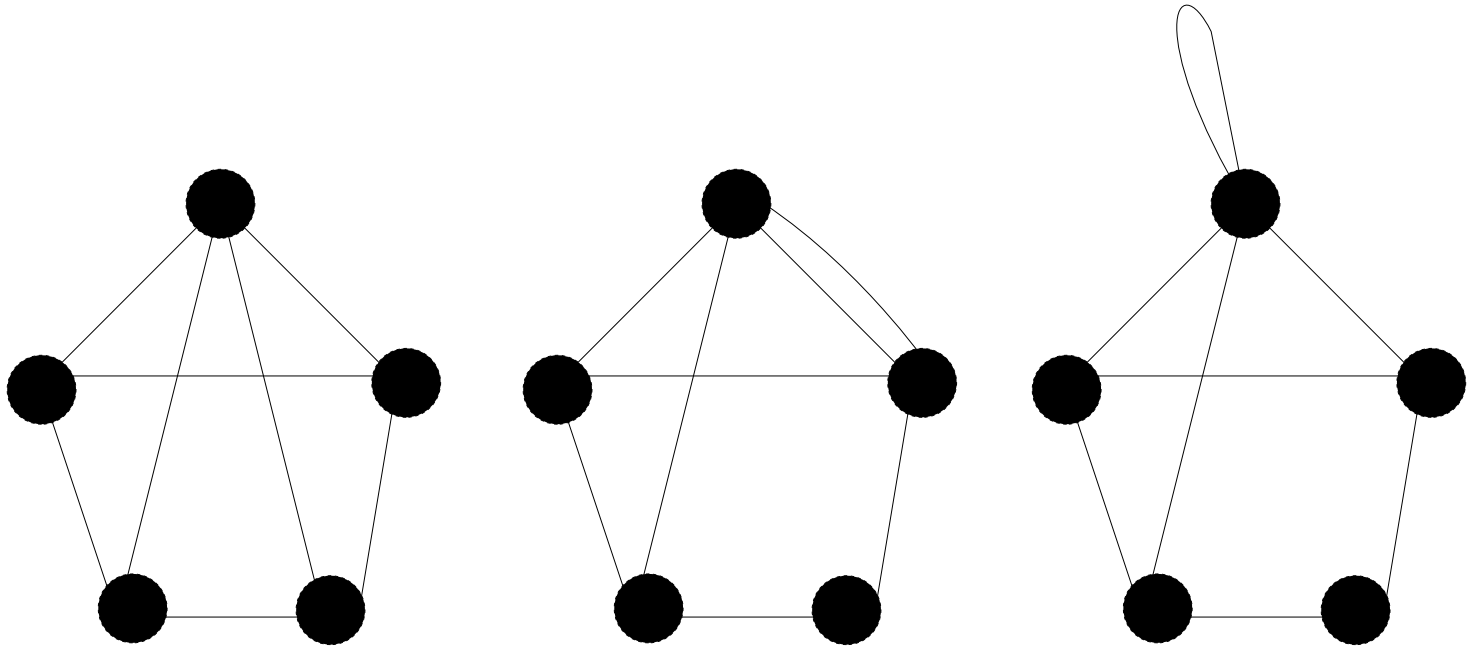


例題 2.3 — 問題 1

5 個の点と 8 本の辺を持つ次のようなグラフを描け。

1. 単純グラフ
2. ループが無い，単純でないグラフ
3. 多重辺がない，単純でないグラフ

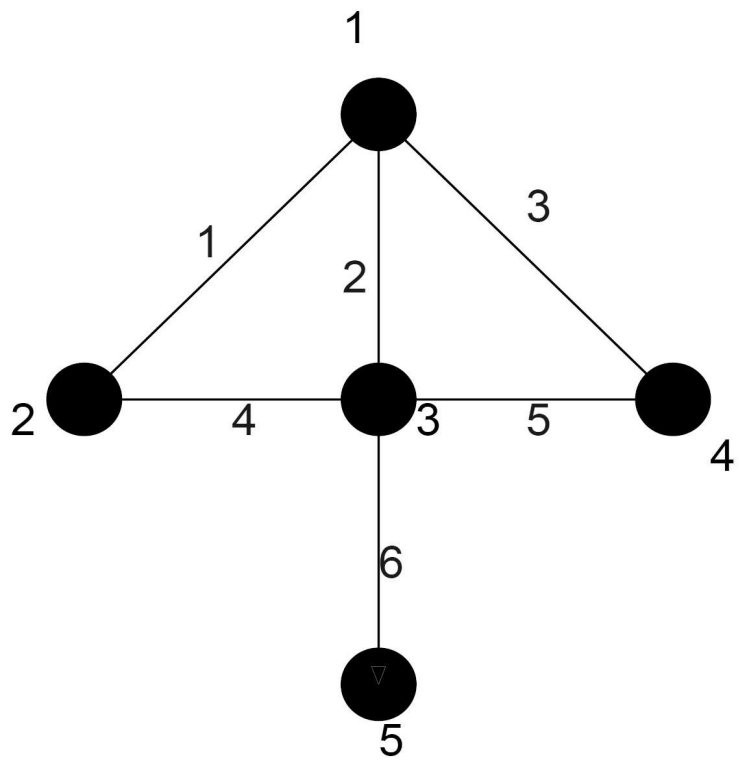
例題 2.3 — 1 の解答



1 2 3

例題 2.3 — 問題 2

下図に与えられるグラフの隣接行列 A，接続行列 M を求めよ。



例題 2.3 — 2 の解答

隣接行列について考える。例題 2.1 と同様，点の数により行列のサイズを決め，点 1 に注目し，行列の 1 列目を求めると，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

例題 2.3 — 2 の解答（つづき）

同様にして，各列を求めると

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題 2.3 — 2 の解答（つづき 2）

接続行列について考える。例題 2.1 と同様，点と辺の数より行列のサイズを決め，点 1 に着目し，行列の 1 行目を求めると，

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

となる。

例題 2.3 — 2 の解答（つづき 2）

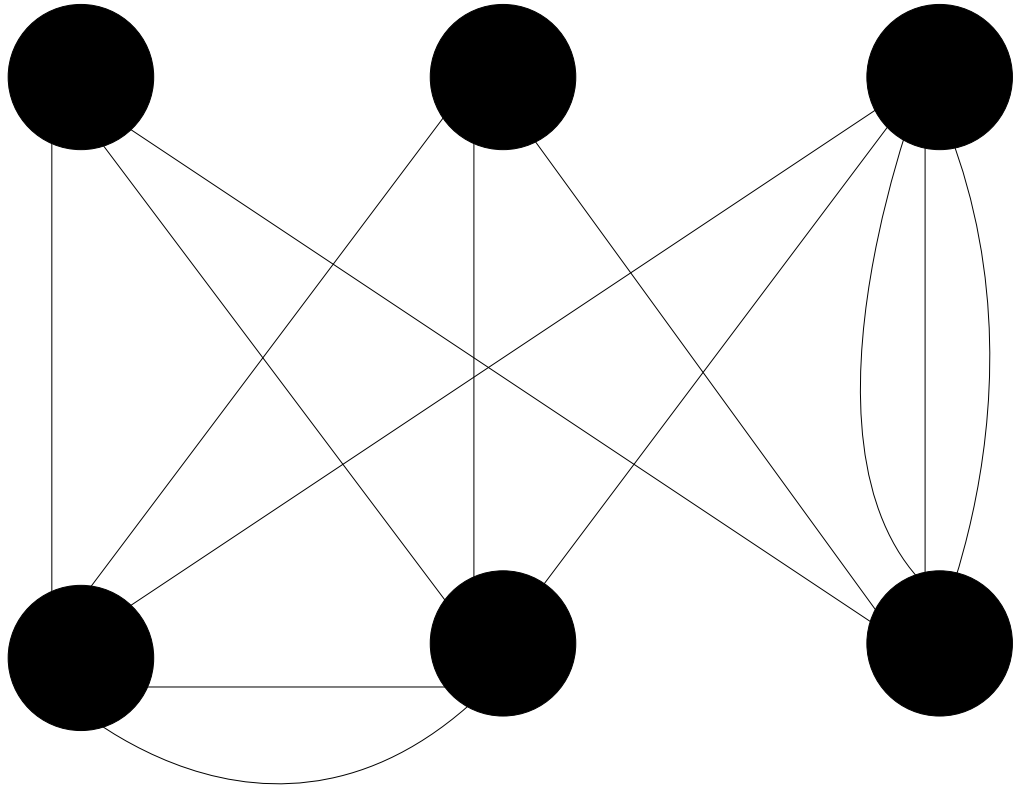
同様にして，点 2-5 に着目し，各行を求めると。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

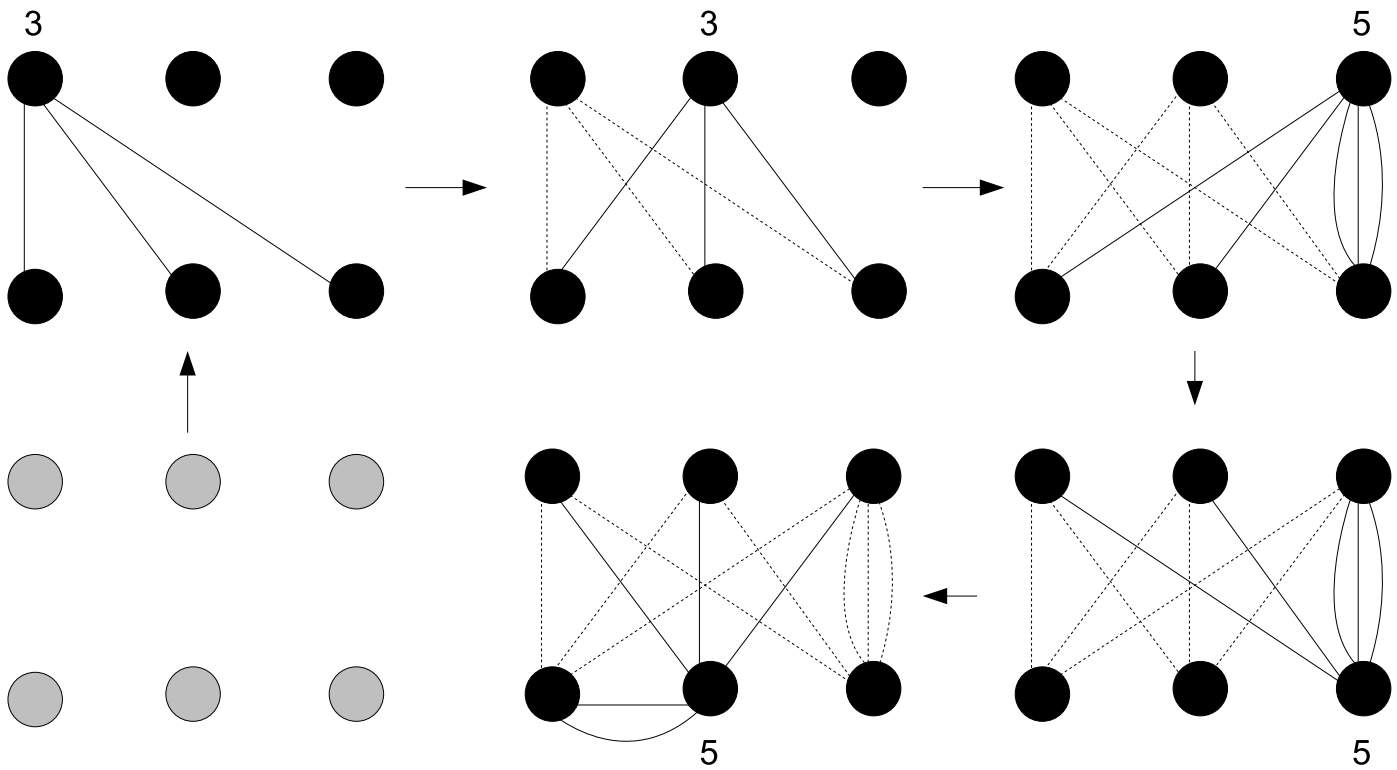
となる。

例題 2.3 — 問題 3 と解答

6 点からなるグラフで，各点の次数列が $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$ であるものを描け。この次数を持つ単純グラフは存在するか？



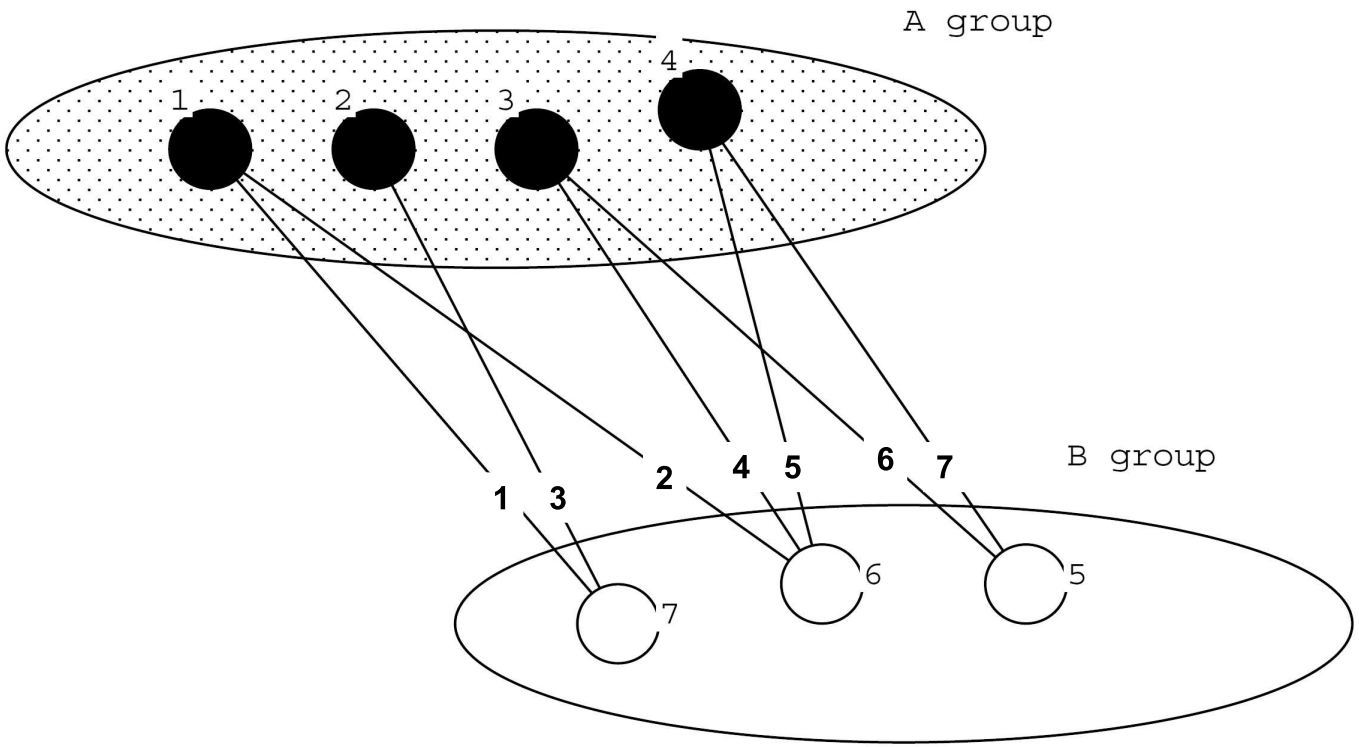
例題 2.3 — 3 の解答（つづき）



点が 5 つに対し，次数 5 であるものが 4 つあるため，単純グラフは存在しない。

演習問題2の（1） — 問題

下図の二部グラフの隣接行列と接続行列，及び次数列をそれぞれ求めよ。



演習問題2の（1）— 解答

隣接行列について考える。例題2.1と同様，点の数により行列のサイズを決め，点1に注目し，行列の1列目を求めると，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 1 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

演習問題2の（1）— 解答（つづき）

同様にして，各列を求めると

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

演習問題2の（1）— 解答（つづき2）

接続行列について考える。例題2.1と同様，点と辺の数より行列のサイズを決め，点1に着目し，行列の1行目を求めると，

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題2の（1）— 解答（つづき3）

同様にして，各行を求めると

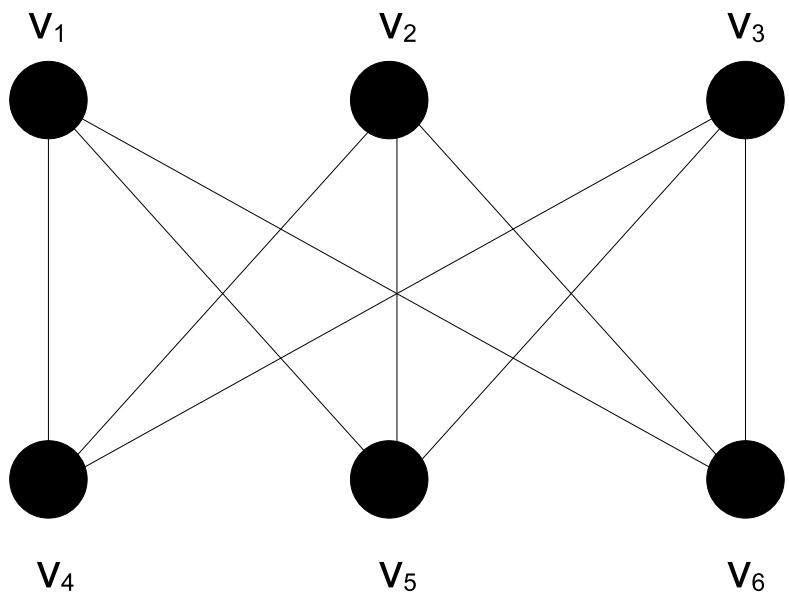
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題2の（2）— 問題と解答

次数列 $(3,3,3,3,3,3)$ はグラフ的か？理由とともに答えよ。

以下のグラフで $\deg(v_i) = 3 (i = 1, 2, \cdots 6)$ という対応関係を定めることができるから，グラフ的である。

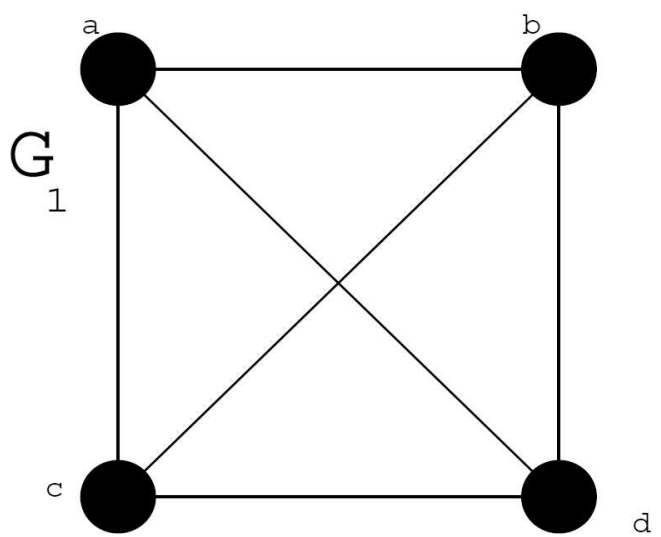


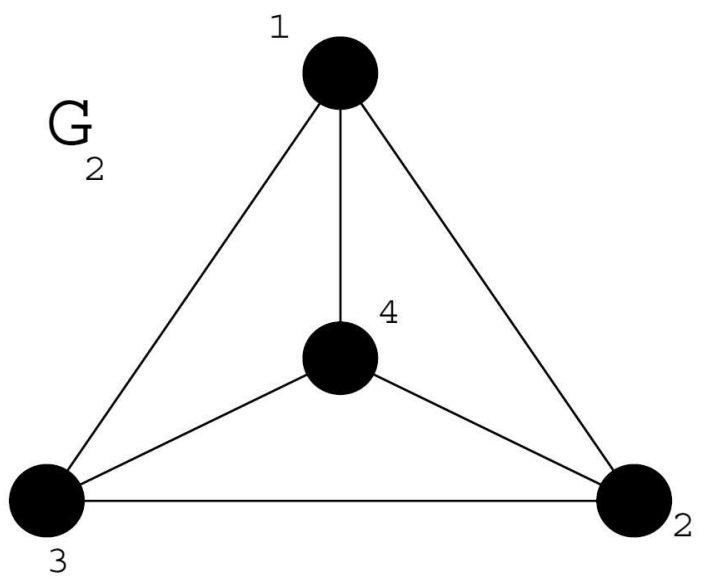
演習問題の（3） — 問題

下図の 2 つのグラフ G_1，G_2 の同型写像 (θ, ϕ) を見つけ，G_1 の任意の辺 e 及び点 u，v に対して，

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

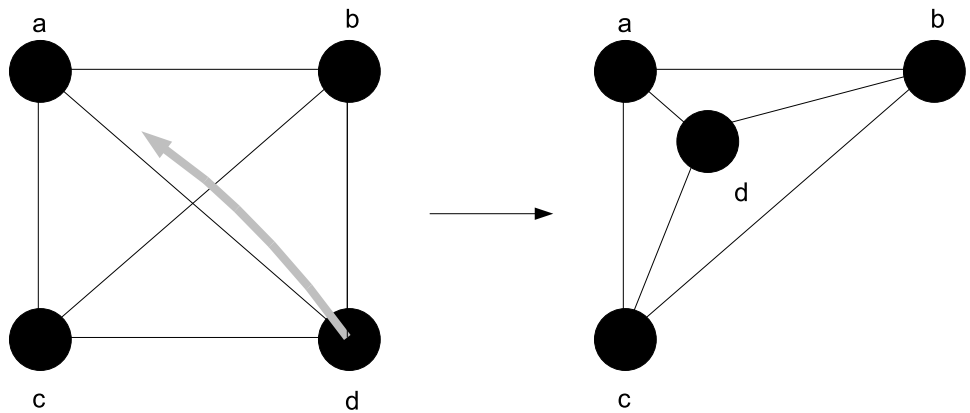
が成り立っていることを $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ。





演習問題の（3）— 解答

点 d を点 a，点 b，点 c が作る三角形の中に移動すると同型である事が分かる。



演習問題の（3）— 解答（つづき）

したがって，θ，ϕ を次のように定めればよい。

$$
\begin{aligned}
\theta &: a \mapsto 1,\ b \mapsto 2,\ c \mapsto 3,\ d \mapsto 4 \\
\phi &: \overline{ab} \mapsto \overline{12},\ \overline{bc} \mapsto \overline{23},\ \overline{cd} \mapsto \overline{34},\ \overline{bd} \mapsto 24, \\
&\quad \overline{ad} \mapsto, \overline{14},\ \overline{ca} \mapsto \overline{31}
\end{aligned}
$$

また，多重辺を含まないため，接続関数の逆関数 $\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}$ が定義できる。以上より，

演習問題の（3）— 解答（つづき2）

$$
\begin{aligned}
& \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ab}) && = ab \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{ab} && = \psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ab) \\
\Leftrightarrow\quad & \phi(\overline{ab}) && = \phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ab)) \\
\Leftrightarrow\quad & \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ab})) && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\psi_{\mathrm{G}_1}^{-1}(ab))) \\
& && = \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b)
\end{aligned}
$$

であるから，$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ab})) = \theta(a)\theta(b)$。その他の組についても全く同様。